入学試験問題　㊞前

数　学(理科)

(配点 120 点)

令和 7 年 2 月 25 日　　14 時—16 時 30 分

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2　問題はすべて新課程と旧課程とに共通です。

3　この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　解答には，必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。

5　2 枚の解答用紙が渡されますが，青色刷りの第 1 解答用紙には，第 1 問～第 3 問について，茶色刷りの第 2 解答用紙には，第 4 問～第 6 問について解答しなさい。

6　**解答用紙の指定欄に，受験番号(表面 2 箇所，裏面 1 箇所)，科類，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**

7　**解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**

8　**解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**

9　この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。

10　解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

11　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　1　問

座標平面上の点 A $(0,0)$, B $(0,1)$, C $(1,1)$, D $(1,0)$ を考える。実数 $0<t<1$ に対して，線分 AB, BC, CD を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P_t, Q_t, R_t とし，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$, $\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$ を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ S_t, T_t とする。さらに，線分 $\mathrm{S}_t\mathrm{T}_t$ を $t:(1-t)$ に内分する点を U_t とする。また，点 A を U_0，点 D を U_1 とする。

(1) 点 U_t の座標を求めよ。

(2) t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と，線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) a を $0<a<1$ を満たす実数とする。t が $0 \leqq t \leqq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを，a の多項式の形で求めよ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　2　問

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $\log x \leqq x - 1$ を示せ。

(2) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^2 \log\left(\frac{1 + x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) dx$$

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第　3　問

平行四辺形 ABCD において，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{BC}=b$，$a \leqq b$ とする。次の条件を満たす長方形 EFGH を考え，その面積を S とする。

条件：　点 A, B, C, D はそれぞれ辺 EF, FG, GH, HE 上にある。

ただし，辺はその両端の点も含むものとする。

(1) $\angle\mathrm{BCG}=\theta$ とするとき，S を a, b, θ を用いて表せ。

(2) S のとりうる値の最大値を a, b を用いて表せ。

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

第 4 問

この問いでは，0 以上の整数の 2 乗になる数を平方数と呼ぶ。a を正の整数とし，$f_a(x) = x^2 + x - a$ とおく。

(1) n を正の整数とする。$f_a(n)$ が平方数ならば，$n \leqq a$ であることを示せ。

(2) $f_a(n)$ が平方数となる正の整数 n の個数を N_a とおく。次の条件 (i)，(ii) が同値であることを示せ。

(i) $N_a = 1$ である。

(ii) $4a + 1$ は素数である。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第 5 問

n を 2 以上の整数とする。1 から n までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計 n 枚あり，横一列におかれている。1 以上 $(n-1)$ 以下の整数 i に対して，次の操作 (T_i) を考える。

(T_i)　左から i 番目の札の数字が，左から $(i+1)$ 番目の札の数字よりも大きければ，これら 2 枚の札の位置を入れかえる。そうでなければ，札の位置をかえない。

最初の状態において札の数字は左から $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ であったとする。この状態から $(n-1)$ 回の操作 $(\mathrm{T}_1),\ (\mathrm{T}_2),\ \ldots,\ (\mathrm{T}_{n-1})$ を順に行った後，続けて $(n-1)$ 回の操作 $(\mathrm{T}_{n-1}),\ \ldots,\ (\mathrm{T}_2),\ (\mathrm{T}_1)$ を順に行ったところ，札の数字は左から $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ と小さい順に並んだ。以下の問いに答えよ。

(1) A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は 2 以下であることを示せ。

(2) 最初の状態としてありうる札の数字の並び方 $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ の総数を c_n とする。n が 4 以上の整数であるとき，c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

第 6 問

複素数平面上の点 $\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円の周から原点を除いた曲線を C とする。

(1) 曲線 C 上の複素数 z に対し，$\frac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ。

(2) α, β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき，$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

(3) γ を (2) で求めた範囲に属さない複素数とするとき，$\frac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

計 算 用 紙

（切り離さないで用いよ。）

計　算　用　紙

（切り離さないで用いよ。）