東京医科歯科大学　医学部 前期

平成26年度入学者選抜個別(第2次)学力検査問題

数　　学

(医　学　科)

注　意　事　項

1. 監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。
2. 問題冊子は，全部で7ページあります。
3. 解答用紙は，問題冊子と別に印刷されているので，誤らないように注意しなさい。
4. 解答用紙には，必ず解答の過程と結果を記入しなさい。
5. 解答は，必ず解答用紙の点線より左に記入しなさい。
6. 下書は，問題冊子の余白を使用しなさい。ただし，切り離してはいけません。
7. 各解答用紙には，受験番号欄が2か所ずつあります。それぞれ記入を忘れないこと。
8. 解答用紙は，記入の有無にかかわらず，机上に置き，持ち帰ってはいけません。この冊子は持ち帰りなさい。
9. 落丁または印刷の不鮮明な箇所があれば申し出なさい。

下 書 用 紙 （切り取ってはいけない）

1 自然数 n に対し，3個の数字1，2，3から重複を許して n 個並べたもの $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の全体の集合を S_n とおく。S_n の要素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対し，次の2つの条件を考える。

条件 C_{12} ：$1 \leqq i < j \leqq n$ である整数 i，j の組で，$x_i = 1$，$x_j = 2$ を満たすものが少なくとも1つ存在する。

条件 C_{123}：$1 \leqq i < j < k \leqq n$ である整数 i，j，k の組で，$x_i = 1$，$x_j = 2$，$x_k = 3$ を満たすものが少なくとも1つ存在する。

例えば，S_4 の要素 $(3, 1, 2, 2)$ は条件 C_{12} を満たすが，条件 C_{123} は満たさない。

S_n の要素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のうち，条件 C_{12} を満たさないものの個数を $f(n)$，条件 C_{123} を満たさないものの個数を $g(n)$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f(4)$ と $g(4)$ を求めよ。

(2) $f(n)$ を n を用いて表せ。

(3) $g(n+1)$ を $g(n)$ と $f(n)$ を用いて表せ。

(4) $g(n)$ を n を用いて表せ。

2 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，xyz 空間内の 4 点 $\mathrm{A}(\cos\theta, \cos\theta, \sin\theta)$，$\mathrm{B}(-\cos\theta, -\cos\theta, \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos\theta, -\cos\theta, -\sin\theta)$，$\mathrm{D}(-\cos\theta, \cos\theta, -\sin\theta)$ を頂点とする四面体の体積を $V(\theta)$，この四面体の xz 平面による切り口の面積を $S(\theta)$ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $S\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$V\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ における $V(\theta)$ の最大値を求めよ。

3 a を正の実数，k を自然数とし，$x > 0$ で定義される関数

$$f(x) = \int_a^{ax} \frac{k + \sqrt[k]{u}}{ku}\, du$$

を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の増減および凹凸を調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) S を正の実数とするとき，$f(p) = S$ を満たす実数 p がただ 1 つ存在することを示せ。

(3) $b = \dfrac{k}{k + \sqrt[k]{a}}$ とおくとき，(2) の S, p について，次の不等式が成立することを示せ。

$$1 + bS < p < e^{bS}$$