

# 数 学 問 題 紙

令和 7 年 2 月 25 日

自 11 : 00

至 12 : 40

## 答 案 作 成 上 の 注 意

1. 数学の問題紙は 1 から 5 までの 5 ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの 4 枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 折りこまれている白紙(4 枚)は草案紙として使用すること。
5. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。
6. すべての解答用紙に受験番号を記入してください。受験番号が記入されていない解答用紙は、答案が記入されていても採点の対象外となります。





**1** 次の各問に答えよ.

- (1) 半径が 1 の円に内接する正五角形の面積を  $S$  とするとき,  $S^2$  を求めよ.
- (2) 空間における 2 点  $A(3, 1, 1)$  と  $B(2, 3, -1)$  を通る直線に, 原点  $O$  から垂線  $OH$  を下ろす. このとき, 点  $H$  の座標を求めよ.
- (3) 複素数平面上の 2 点  $z_1 = 5 + 3i$ ,  $z_2 = 2\sqrt{3} + (3 + \sqrt{3})i$  について, 点  $z_1$  をある点  $z$  を中心に  $\frac{\pi}{6}$  だけ回転したら点  $z_2$  に重なった. このときの  $z$  を求めよ. ただし  $i$  は虚数単位とする.

**2** 平面上に異なる4点  $O, A, B, C$  があり, どの3点も同一直線上にはない.

ただし, 直線  $OB$  に対して  $A$  と  $C$  は反対側にあるものとする.

いま,  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $OA = a$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $OB = b$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ,  $OC = c$ ,  $AB = q$ ,  
 $BC = r$ ,  $\vec{e} = \frac{1}{b}\vec{b}$  とする.

さらに  $x = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB}$ ,  $y = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BC}$ ,  
 $z = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ ,  $w = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC}$  とする.

(1) 次の3つの等式が成り立つことを示せ.

$$x = w$$

$$y = c^2 - a^2 - w$$

$$z = a^2 - q^2 + w$$

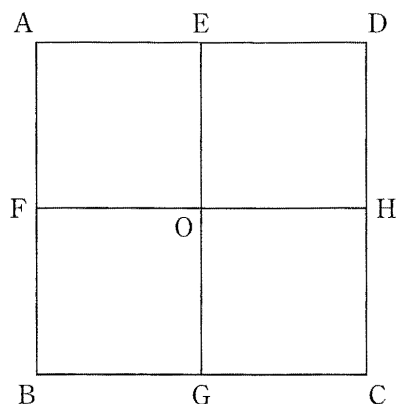
今後, 三角形  $OAB$  と三角形  $OBC$  は面積が等しいものとし, 以下の設問ではこれが成り立つことを前提とせよ. また, 必要に応じて  $\vec{e}$  と直交する単位ベクトル  $\vec{f}$  を計算に利用せよ.

(2)  $\vec{a} + \vec{c}$  と  $\vec{b}$  が平行であることを示せ.

(3)  $\lambda = \frac{w}{b}$  とするとき,  $|\vec{c} - \lambda\vec{e}| = a$  となることを示せ.

(4)  $y \neq 0$  のとき,  $b^2$  を  $x, y, z$  を用いて表せ.

- 3 右図のように O, A, B, C, D, E, F, G, H の 9 地点と線で描かれた道があり、ある人が地点 O にいる。その人は、一回の移動で道に沿って一つ隣の地点へ移動する。ここで、1 回の移動は、以下の確率に従って行われる。



- ① 地点 O にいる場合、地点 E, F, G, H へ移動する確率はそれぞれ  $\frac{1}{4}$ 。
- ② 地点 A, B, C, D にいる場合、2 つ存在する隣の地点へ移動する確率はそれぞれ  $\frac{1}{2}$ 。例えば、地点 A にいる場合、地点 E に移動する確率が  $\frac{1}{2}$ 、地点 F に移動する確率も  $\frac{1}{2}$  である。
- ③ 地点 E, F, G, H にいる場合、地点 O 以外に 2 つ存在する隣の地点へ移動する確率はそれぞれ  $p$ 、地点 O へ移動する確率は  $1 - 2p$ 。例えば、地点 F にいる場合、地点 A に移動する確率は  $p$ 、地点 B に移動する確率も  $p$ 、地点 O に移動する確率は  $1 - 2p$  である。ただし  $p$  は  $0 < p < \frac{1}{2}$  をみたすものとする。

- (1) ちょうど 2 回の移動で地点 A または地点 C にいる確率を求めよ。
- (2) ちょうど 2 回の移動で地点 O に戻る場合、その人が地点 E を通過している確率を求めよ。
- (3) ちょうど 4 回の移動で地点 A にいる確率を求めよ。
- (4) ちょうど 4 回の移動で地点 A にいる場合、その人がそれまでに地点 O を通過している確率を求めよ。ただし、最初に地点 O からスタートしたことは「地点 O を通過した」ことにはならない。

4

 $a > 0$  を定数とし,  $0 \leq x \leq \pi$  における 2 つの関数

$$f(x) = \sin 2x, \quad g(x) = a \cos \frac{x}{2}$$

を考える. 2 つの曲線  $C_1: y = f(x)$  と  $C_2: y = g(x)$  が  $(\pi, 0)$  以外に 1 点のみを共有するとき, 以下の各問に答えよ.

- (1)  $0 \leq x < \pi$  において  $u = \sin \frac{x}{2}$  とおく. このとき,  $\frac{\sin 2x}{\cos \frac{x}{2}}$  を  $u$  を用いて

表せ.

- (2)  $a$  の値を求めよ.

- (3)  $C_1$  と  $C_2$  で囲まれる部分の面積を求めよ.

