令和7年度入学試験問題

数　　学

(理学部，工学部，歯学部，医学部(医学科，保健学科放射線技術科学専攻))

注　意　事　項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で6ページある。(落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。)

　別に解答用紙がある。

3　**解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。**

4　受験番号は，各解答用紙の指定された2箇所に必ず記入すること。

5　受験学部，学科，専攻，選抜方法により解答すべき問題(○印)，解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部 (学科，専攻，選抜方法)	解答すべき問題(○印)						解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5	6		
理学部(理数重点選抜)及び工学部	○	○	○	○	○		5枚	120分
理学部(野外科学志向選抜)及び医学部(保健学科放射線技術科学専攻)	○	○	○	○			4枚	90分
歯学部		○	○	○	○		4枚	90分
医学部(医学科)			○	○	○	○	4枚	90分

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

7　問題冊子は，持ち帰ること。

1 座標平面上の原点をOとし，1点$A(a, -1)$をとる。ただし，$a > 0$とする。また，放物線$y = x^2$上に点Bをとる。ただし，Bは原点以外の点とする。次の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$が垂直になるときの点Bの座標をaを用いて表せ。また，そのときの三角形OABの面積Sをaを用いて表せ。

(2) 内積$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$が最大になるときの点Bの座標を$a$を用いて表せ。また，そのときの三角形OABの面積$T$を$a$を用いて表せ。

(3) SとTは，(1)と(2)で求めたものとする。$S = 3T$となるときの点Aの座標を求めよ。

2 実数 t に対して，

$$F(t) = \int_0^t e^{-2x} \sin^2 x \, dx$$

とおく。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，関数 $y = e^{-2x} \sin^2 x$ の極値を求めよ。

(2) 実数 t に対して，

$$I(t) = \int_0^t e^{-2x} \cos 2x \, dx, \quad J(t) = \int_0^t e^{-2x} \sin 2x \, dx$$

とおく。このとき，次の 3 つの等式 (a)，(b)，(c) が成り立つことを示せ。

(a) $F(t) = -\dfrac{1}{2} e^{-2t} \sin^2 t + \dfrac{1}{2} J(t)$

(b) $I(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} e^{-2t} \cos 2t - J(t)$

(c) $J(t) = -\dfrac{1}{2} e^{-2t} \sin 2t + I(t)$

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{t \to \infty} F(t)$ を求めよ。

3 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ に対して，数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \alpha^{n-1} + \beta^{n-1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。次の問いに答えよ。

(1) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ。

(2) 自然数 n に対して，$\alpha^{n+1} - \alpha^n = \alpha^{n-1}$, $\beta^{n+1} - \beta^n = \beta^{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。すなわち，

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。b_1 を求めよ。また，$n \geqq 2$ に対して，$b_n = a_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(4) 自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+2} - 1$ が成り立つことを示せ。

(5) 自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = a_n a_{n+1} + 2$ が成り立つことを示せ。

4 2つの関数 $f(x) = \log_2 x$，$g(x) = \left|x^2 - 2x - 3\right| - \left|x^2 - x\right|$ について，それらの合成関数 $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{16} \leqq x \leqq 4$ のとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{16} \leqq x \leqq 4$ のとき，$h(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 関数 $y = h(x)$ $\left(\dfrac{1}{16} \leqq x \leqq 4\right)$ のグラフと直線 $y = 1$ の共有点の個数を求めよ。また，共有点の x 座標をすべて求めよ。

(4) a は定数とする。関数 $y = h(x)$ $\left(\dfrac{1}{16} \leqq x \leqq 4\right)$ のグラフと直線 $y = a$ が共有点をもつとき，その共有点の個数を a の値によって場合分けして求めよ。

5 次の条件（☆）を満たす複素数 z を考える。ただし，i は虚数単位とする。

（☆）iz^2 は実数であって，$0 \leqq iz^2 \leqq 2$ である。

次の問いに答えよ。

(1) $iz^2 = 2$ であるときの複素数 z をすべて求めよ。

(2) $0 < iz^2 \leqq 2$ であるときの複素数 z の偏角 θ をすべて求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(3) 条件（☆）を満たす複素数 z 全体の集合を S とする。集合 S を複素数平面上に図示せよ。

(4) 複素数 z が (3) の S を動くとき，$\dfrac{z}{z+2}$ の実部の最小値を求めよ。

6 座標平面上の曲線 $y = x\sin^2 x$ を C とする。自然数 n に対して，曲線 C 上に点 $\mathrm{P}_n(n\pi, 0)$，点 $\mathrm{Q}_n\left(\dfrac{2n-1}{2}\pi, \dfrac{2n-1}{2}\pi\right)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 P_n における接線の方程式を求めよ。また，曲線 C 上の点 Q_n における接線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ で囲まれる部分の面積 S_n を n を用いて表せ。

(3) 曲線 C と線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ で囲まれる部分の面積 T_n を n を用いて表せ。

(4) S_n と T_n は，(2) と (3) で求めたものとする。極限値

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{k} S_n}{\displaystyle\sum_{n=1}^{k} T_n}$$

を求めよ。