平成22年度入学試験問題

数　　学（理，医，歯，工学部）

注 意 事 項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で5ページある。（落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。）

別に解答用紙がある。

3　**解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。**

4　受験番号は，各解答用紙の指定された2箇所に必ず記入すること。

5　受験学部，学科により解答すべき問題（○印），解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部，学科	解答すべき問題（○印）					解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5		
理学部（数学科，物理学科）及び工学部	○	○	○	○	○	5枚	120分
理学部（化学科，生物学科，自然環境科学科），医学部及び歯学部	○	○	○	○		4枚	90分

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

7　問題冊子は，持ち帰ること。

1 四面体OABCにおいて，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=3$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\sqrt{6}$である。また，点Pは辺ABを$x:1-x$に内分し，点Qは辺OCを$y:1-y$に内分する（$0<x<1$，$0<y<1$）。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$として，次の問いに答えよ。

(1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$x$，$y$で表せ。

(3) 2点P，Qの間の距離PQの最小値と，そのときのx，yの値を求めよ。

2 次の条件(ア)〜(ウ)を満たす数列 $\{p_n\}$ について考える。

(ア) $p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_n \leqq \cdots$ である。

(イ) $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots$ はどれも自然数である。

(ウ) $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots$ の中にはすべての自然数 k が現れ，その個数は k 以上 $k+2$ 以下である。

条件(ア)〜(ウ)を満たし，すべての自然数 k がちょうど k 個現れる数列

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots,\ \overbrace{k,\ k,\ \cdots,\ k}^{k\text{個}},\ \cdots$$

を $\{a_n\}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 項数 5 の数列で，数列 $\{p_n\}$ の初めの 5 項となり得るものをすべて挙げよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 210 項 a_{210} の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{50} p_i$ のとり得る最小の値を求めよ。

3 行列$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & d\end{pmatrix}$は，ある実数$k$に対して等式$A^2=kA$を満たす。このとき，次の問いに答えよ。ただし，$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$とする。

(1) kとdの値を求めよ。

(2) 実数bとcが等式

$$(E+bA)(E+2A)=E+cA$$

を満たすとき，cをbで表せ。

(3) 数列$\{a_n\}$が任意の自然数nに対して等式

$$(E+2A)^n=E+a_nA$$

を満たすとき，a_nをnで表せ。

4 $F(x)=\int_0^x \sqrt{1+e^{2t}}\,dt$ とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $\sqrt{1+e^{2t}}=u$ とおいて，$F(x)$ を求めよ。

(2) $\lim_{x \to \infty} \{F(x)-e^x\}$ を求めよ。

5 座標平面上の4点をA(1, 1), B(1, 2), C(2, 2), D(2, 1)とする。点Aに駒をおき，1個のさいころを投げて，出た目の数だけこれらの点の上を時計回りに駒を進める試行を考える。たとえば，出た目が5のとき，駒はA→B→C→D→A→Bと進みBに止まる。1回目の試行で止まる点をPとし，駒を点Aに戻し，2回目の試行で止まる点をQとする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，Oは原点を表す。

(1) O, P, Qが同一直線上にある確率を求めよ。

(2) O, P, Qを通る2次関数$y=f(x)$のグラフがただ一通りに定まるとき，P, Qの位置およびその2次関数をすべて求めよ。

(3) (2)で2次関数がただ一通りに定まるとき，その2次関数の最大値をXとし，そうでないとき$X=0$とする。このとき，Xの期待値を求めよ。