1 関数 $y=x^2$ のグラフ C と，定点 A$(0,\ a)$ $(a>0)$ を通り傾き t の直線 l との交点を P，Q とする。また，点 A を通り直線 l に垂直な直線 m と，曲線 C との交点を R，S とする。ここで，t は正の実数とし，P と R の x 座標は正，Q と S の x 座標は負であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) PQ^2 と RS^2 を a と t を用いて表せ。

(2) $u=t^2+\dfrac{1}{t^2}$ とおき，四角形 PSQR の面積を T とするとき，T^2 を u を用いて表せ。

(3) 直線 l の傾き t が正の実数全体を動くとき，面積 T の最小値を求めよ。

2 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ とし，E は2次の単位行列とする。また，P と Q は2次の正方行列で $A = 2P + 3Q$，$P + Q = E$ をみたしているとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) P と Q を求めよ。

(2) $P^2 = P$，$Q^2 = Q$ を示し，PQ と QP を求めよ。

(3) A の逆行列を $aP + bQ$ と表したとき，実数 a と b を求めよ。

(4) 自然数 n に対して，A^n を求めよ。

3　1辺の長さが r の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，三角形ABCの重心をGとおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を示せ。

(3)　線分OGを3：1に内分する点をHとするとき，OH＝HAを示し，この値を求めよ。

(4)　$\angle$ OHAを θ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

4 関数 $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}(\cos x+\sin x)$ に対して，$f(x)=0$ の正の解を小さい方から順に a_1，$a_2, \cdots$，$a_n, \cdots$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a_n を求めよ。

(2) $a_n \leqq x \leqq a_{n+1}$ の範囲で，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる部分を，x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V_n を求めよ。

(3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ の和を求めよ。

5 点Pは数直線上を原点から出発して，投げたサイコロの目が1，2，3または4なら正の向きに2進み，5または6なら負の向きに1進むとする。点Pの座標をxとして，サイコロをn回投げたとき，$x=15$となる確率をp_nとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) n回中，5または6の目がk回出る確率をnとkを用いて表せ。ただし，$k=0, 1, \cdots, n$とする。

(2) p_9とp_{10}を求めよ。

(3) $n \geqq 9$とするとき，p_nを求めよ。

6 p と q は相異なる実数とし，整式 $P(x)=x^3+px+q$ と $Q(x)=x^3+qx+p$ は共通因数 $R(x)$ をもつとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $R(x)$ は 2 次式ではないことを示せ。

(2) r を実数として，$R(x)=x+r$ とするとき，p と q の関係および r の値を求めよ。

(3) $p=0$ のときを考える。整式 $S(x)$ は $P(x)$ と $Q(x)$ で共に割り切れる整式のうち次数が最小で，最高次数の項の係数が 1 であるとする。このような $S(x)$ を求めよ。