1 放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 上の異なる2点P，Qにおける接線が直交するとし，Pの座標を $\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ $(a>0)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 点Qの座標，および，PとQを結ぶ直線 l の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}$ と直線 l で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

2 $A^2 + A + E = O$ を満たす2次の正方行列 A について，次の問いに答えよ。ただし，E，O はそれぞれ単位行列，零行列とする。

(1) $\alpha A + \beta E = O$ を満たす実数 α，β が存在するならば，$\alpha = \beta = 0$ となることを示せ。

(2) $(xA + yE)^3 = E$ を満たす実数 x, y の組をすべて求めよ。

3 2次関数$f(x)=x^2+(k-1)x+3k-2$（kは実数）について，次の問いに答えよ。

(1) 2次方程式$f(x)=0$が虚数解をもつようなkの値の範囲を求めよ。

(2) $x=u+iv$（u，vは実数）が2次方程式$f(x)=0$の虚数解のとき，uとvの間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) kが0以上のすべての実数値をとるとき，2次方程式$f(x)=0$の解(実数解および虚数解)すべての集合を複素数平面上に図示せよ。

4 袋の中に赤玉4個と白玉6個が入っている。3個を同時に袋から取り出し，取り出された赤玉の個数を記録してから袋に戻す。この試行を n 回くり返したとき，記録された赤玉の個数の合計が奇数である確率を p_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) p_1 を求めよ。

(2) p_{n+1} を p_n で表せ。

(3) p_n を求めよ。

5 次の問いに答えよ。ただし，数値はすべて 10 進数とする。

(1) 7^{12} の 1 の位を求めよ。

(2) n が自然数のとき，117^n の 1 の位は 1，3，7，9 のいずれかであることを証明せよ。

(3) 117^{2002} の 1 の位を求めよ。

$\boxed{6}$ 座標平面上の 2 定点 A$(\sqrt{2},\ 0)$，B$(-\sqrt{2},\ 0)$に対し，条件 PA・PB $= 2$ を満たして動く点 P$(x,\ y)$を考える。

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4},\ r > 0\right)$$

とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $r^2 = 4\cos 2\theta$ が成り立つことを示せ。

(2) 三角形 PAB の面積の最大値を求めよ。また，このときの点 P の座標を求めよ。