1 2つの2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=px^2+qx+r$ が $f(-1)=g(-1)=0$, $f(2)=g(2)=3$ をみたすとき，次の問いに答えよ。

(1) a, b を c で表せ。

(2) $c<r$ のとき，$-1<x<2$ をみたす x に対して $f(x)<g(x)$ が成り立つことを示せ。

2 平行四辺形 ABCD において，4 辺 AB，BC，CD，DA 上にそれぞれ点 E，F，G，H を，HF//AB，EG//BC となるようにとり，2 直線 EF と AC の交点を M，2 直線 HG と AC の交点を N とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = p\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = q\vec{b}$ とおくとき，$\frac{1}{2} < p < 1$，$\frac{1}{2} < q < 1$ であるとして，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HG}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} + s\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}} + t\overrightarrow{\mathrm{HG}}$ とするとき，s，t を p と q で表せ。

(3) 2 点 M，N は一致することを示せ。

3 Oを原点とするxy平面上に，定点A$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$と２つの動点P，Qがある。点QはPを中心とする半径１の円周上を，点（3，0）から出発して反時計回りに毎秒2πの速さで等速回転している。さらに，点PはOを中心とする半径２の円周上を，点（2，0）から出発して反時計回りに，毎秒πの速さで等速回転している。このとき次の問いに答えよ。

(1) t秒後のAQの長さを$f(t)$とするとき，$f(t)$を求めよ。

(2) 動点PがOのまわりを１回転するまでの間で，$f(t)$が最大，最小となるtとそのときの$f(t)$の値を求めよ。

(3) $f(t)$が初めて最小となるまでに，動点Qが動いた道のりを求めよ。

4 -1と異なる複素数zに対し，複素数wを $w = \dfrac{z}{z+1}$ で定めるとき，次の問いに答えよ。

(1) zが複素数平面の虚軸上を動くとき，wが描く図形を求めよ。

(2) zが複素数平面上の円 $|z-1| = 1$ の上を動くとき，wが描く図形を求めよ。

5 2つの楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$, $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ について，次の問いに答えよ。

(1) 4つの交点の座標を求めよ。

(2) 2つの楕円の内部の重なった部分の面積を求めよ。

6 nを自然数とするとき，等式 $\dfrac{1}{1-t^2}=1+t^2+t^4+\cdots+t^{2n-2}+\dfrac{t^{2n}}{1-t^2}$

の両辺を，区間 $[0,\ x]$ $(0<x<1)$ で積分すると，

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt$$

となる。これについて，次の問いに答えよ。

(1) $0<x<1$ のとき，

$$0<\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt<\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

となることを示せ。

(2) $0<x<1$ のとき，無限級数

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$$

の和を求めよ。