

(前期日程)

平成21年度 数 学

問題の選択方法

教育学部 } の受験者は [1], [2], [3], [4] の4問
農学部 }

理学部 } の受験者は [4], [5], [6], [7], [8] の5問
工学部 }

医学部 の受験者は [4], [6], [7], [8], [9] の5問

を解答すること。

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は、18 ページあります。

試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。

- 3 解答は、すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。
- 4 問題紙の余白は下書きに使用してよい。

1

(教育学部・農学部)

次の問に答えよ。

- (1) 方程式 $x^2 + 2|x - 1| - 5 = 0$ を解け。
- (2) $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$ を計算せよ。
- (3) i^{2009} を計算せよ。ただし、 i は虚数単位である。また、 x^{2009} を $x^2 + 1$ で割ったときの余りを求めよ。
- (4) 84^{12} のけた数を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$, $\log_{10} 7 = 0.845$ とする。
- (5) 平面上の4点 $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(5, 1)$, (a, b) を頂点とする四角形が平行四辺形となるような座標 (a, b) をすべて求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

表面に1から6までの数字を1つずつ書いた6つの球がある。これらの球を箱の中に入れ、同時に2つの球を取り出し、その数字の和を得点とする試行を行う。

(1) 得点が次のようになる確率をそれぞれ求めよ。

(i) 10

(ii) 9以上

(2) AさんとBさんがこの球を使ってゲームをする。箱の中から同時に2つの球を取り出す試行を行い、その得点を記録し、またもとに戻して相手方にかわる。各自の得点を加算していき、どちらかの合計得点が20以上になるまでこの試行を繰り返し、先に20以上になった方を勝者とする。

(i) Aさんからこのゲームを始めるとき、Aさんにとって2回目の試行でAさんが勝つ確率を求めよ。

(ii) Bさんからこのゲームを始めるとき、Aさんにとって2回目の試行でAさんが勝つ確率を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

3

(教育学部・農学部)

$k \neq \pm 1$ とする。2 直線 ℓ , m を

$$\ell : x + ky = 3, \quad m : kx + y = 3$$

で定め、それらの交点を P とする。

- (1) 点 P の座標を k を用いて表せ。
- (2) 放物線 $y = ax^2$ が点 P を通るとき、 a を k を用いて表せ。
- (3) 放物線 $y = ax^2$ が点 P で直線 ℓ と接するとする。
 - (i) k の値を求めよ。
 - (ii) 放物線 $y = ax^2$, 直線 m および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

4

(教育学部・農学部・理学部・工学部・医学部)

3点 $A(0, -1, 3)$, $B(2, 1, 4)$, $C(1, -3, 5)$ と実数 θ に対して,
点 P は

$$\overrightarrow{AP} = (\sin \theta) \overrightarrow{AB} + (\cos \theta) \overrightarrow{AC}$$

をみたすものとする。

- (1) 大きさ $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$ および内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ の値を求めよ。
- (2) $|\overrightarrow{AP}|$ は θ の値に関係なく一定であることを示せ。
- (3) 点 P を点 B および点 C と異なる点とすると、 $\triangle PBC$ の面積の最大値を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

5

(理学部・工学部)

次の問に答えよ。

- (1) i^{2009} を計算せよ。ただし、 i は虚数単位である。また、 x^{2009} を $x^2 + 1$ で割ったときの余りを求めよ。
- (2) 84^{12} のけた数を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$, $\log_{10} 7 = 0.845$ とする。
- (3) 平面上の4点 $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(5, 1)$, (a, b) を頂点とする四角形が平行四辺形となるような座標 (a, b) をすべて求めよ。
- (4) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 2} - 2\sqrt{x^2 - x + 1})$ を求めよ。
- (5) 次の定積分を求めよ。
- (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$
- (ii) $\int_1^e x^2 \log x dx$

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を帰納的に

$$f_1(x) = x^2 - x + 1,$$

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + n^2 x^2 - nx + 3^{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

で定める。

- (1) 関数 $f_n(x)$ を係数 a_n, b_n, c_n を用いて $f_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$ と表す。
 $n \geq 2$ のとき、 a_n, b_n, c_n をそれぞれ $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ および n を用いて表せ。
- (2) (1) における数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ および $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数学的帰納法を用いて、すべての自然数 n に対して $3^n > n + 1$ が成り立つことを示せ。
- (4) すべての自然数 n に対して、 x についての方程式 $f_n(x) = 0$ は実数解をもたないことを示せ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

θ を実数とし, xy 平面上で, まず直線 $y = x$ に関する対称移動を行い, その後原点のまわりの回転角 θ の回転移動を行う。この移動の合成を表す行列を $A(\theta)$ とする。

- (1) 直線 $y = x$ に関する対称移動, および原点のまわりの回転角 θ の回転移動を表す行列をそれぞれ書け。ただし, 答えのみでよい。
- (2) $A(\theta)$ を求めよ。
- (3) 実数 α, β に対して, 行列の積 $A(\alpha)A(\beta)$ は原点のまわりの回転移動を表す行列であることを示し, 回転角を α, β で表せ。
- (4) $\alpha = \frac{4}{9}\pi, \beta = \frac{5}{6}\pi$ のとき $\{A(\alpha)A(\beta)\}^n = E$ となる最小の自然数 n を求めよ。ただし, E は単位行列とする。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ とする。 y 軸上の点 $P(0, p)$ より、曲線 $y = f(x)$ に異なる 2 本の接線が引けるための p のとり得る値の範囲を求めたい。次の問に答えよ。ただし、必要があれば、自然数 k に対して $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ となることを用いてもよい。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) (1) で求めた接線の y 切片を $g(t)$ とする。関数 $y = g(x)$ の増減、極値を調べ、そのグラフをかけ。ただし、グラフの凹凸は調べなくてもよい。
- (3) p のとり得る値の範囲を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

9

(医学部)

関数 $f(x)$ は第 2 次導関数を持ち、条件

- (i) $f(0) > 0$, $f(1) = 1$
- (ii) $f'(0) > 0$, $0 < f'(1) < 1$
- (iii) すべての実数 x に対して $f''(x) > 0$

をすべてみたすものとする。また、数列 $\{x_n\}$ を帰納的に

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

- (1) $0 \leq x < 1$ のとき

$$f(0) \leq f(x) < 1, \quad f'(0) \leq f'(x) < f'(1)$$

であることを示せ。

- (2) すべての自然数 n に対して

$$0 < 1 - x_{n+1} < f'(1)(1 - x_n)$$

が成り立つことを示せ。

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ であることを示せ。