

(前期日程)

平成19年度 数 学

問題の選択方法

教育学部 } の受験者は [1], [2], [3], [4] の4問
農学部 }

医学部 } の受験者は [3], [4], [5], [6] の4問
工学部 }

を解答すること。

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は、12 ページあります。

試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。

- 3 解答は、すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。
- 4 問題紙の余白は下書きに使用してよい。

1

座標平面上で，連立不等式

$$y - 5x \leq -28, \quad 2y + 5x \leq 34, \quad y \geq -3$$

の表す領域を A ，不等式

$$x^2 + y^2 \leq 2$$

の表す領域を B とする。

- (1) 領域 A を図示せよ。
- (2) 点 (x, y) が領域 A を動くとき， $y - 2x$ の最大値と最小値を求めよ。
- (3) k を実数とし
 点 (x, y) が領域 A を動くときの $y - kx$ の最小値
 と
 点 (x, y) が領域 B を動くときの $y - kx$ の最大値
 が同じ値 m であるとする。このとき， k と m の値を求めよ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

2

平面上に平行でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ があり, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ とする。

- (1) $\vec{a}$ と $\vec{a} + t\vec{b}$ のなす角と, $\vec{b}$ と $\vec{a} + t\vec{b}$ のなす角が等しくなるように実数 t の値を定めよ。
- (2) $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ のとりうる値の範囲を求めよ。また, $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 4$ のとき $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

3

$f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$ とする。 $p < q$ とし、 曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $(p, f(p))$, $(q, f(q))$ における接線をそれぞれ ℓ_p , ℓ_q とする。 ℓ_p , ℓ_q が曲線 $y = g(x)$ 上の点 $(r, g(r))$ で交わるとする。

(1) $p + q$, pq を r を用いて表せ。

(2) 接線 ℓ_p , ℓ_q と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積 S を p , q を用いて表せ。

(3) (2)における面積 S の最小値を求めよ。また、そのときの p と q の値を求めよ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

1つのさいころを3回くり返し投げる試行において、出た目の数の最大値と最小値を観測する。たとえば、出た目が5, 3, 5のときは、最大値は5であり最小値は3である。このとき、事象 A_k, B_k, C_k, D_k を次のように定める。ただし、 $k = 1, 2, \dots, 6$ である。

A_k は最大値が k 以下になる事象

B_k は最大値がちょうど k である事象

C_k は最小値が k 以上になる事象

D_k は最小値がちょうど k である事象

- (1) 確率 $P(A_k)$ および $P(C_k)$ を k を用いて表せ。
- (2) 確率 $P(B_k)$ および $P(D_k)$ を k を用いて表せ。
- (3) 最大値の期待値と最小値の期待値をそれぞれ求めよ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

- (1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

とする。すべての実数 x について

$$(x^2 + 2x + 2)f''(x) + a(x + 1)f'(x) + 2f(x) = 0$$

が成り立つように定数 a の値を定めよ。

- (2) m が整数のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos 2x \, dx$$

の値を求めよ。

- (3) n が自然数のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+k)(2n-k-1)} = \frac{2}{3n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

であることを示し、極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+k)(2n-k-1)}$$

を求めよ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

四角形 $A_1B_1C_1D_1$ を 1 辺の長さが a の正方形とする。自然数 n に対して、四角形 $A_nB_nC_nD_n$ から 4 点 A_{n+1} , B_{n+1} , C_{n+1} , D_{n+1} を次のように定める。

辺 A_nB_n , B_nC_n , C_nD_n および D_nA_n の中点をそれぞれ K_n , L_n , M_n および N_n とし、線分 A_nM_n と線分 B_nN_n の交点を A_{n+1} , 線分 B_nN_n と線分 C_nK_n の交点を B_{n+1} , 線分 C_nK_n と線分 D_nL_n の交点を C_{n+1} , 線分 D_nL_n と線分 A_nM_n の交点を D_{n+1} とする。

(1) すべての n について四角形 $A_nB_nC_nD_n$ は正方形であることを数学的帰納法によって示せ。

(2) 4 つの三角形 $\triangle A_nA_{n+1}N_n$, $\triangle B_nB_{n+1}K_n$, $\triangle C_nC_{n+1}L_n$ および $\triangle D_nD_{n+1}M_n$ の面積の和 S_n を求めよ。

(3) (2)で求めた S_n について、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。