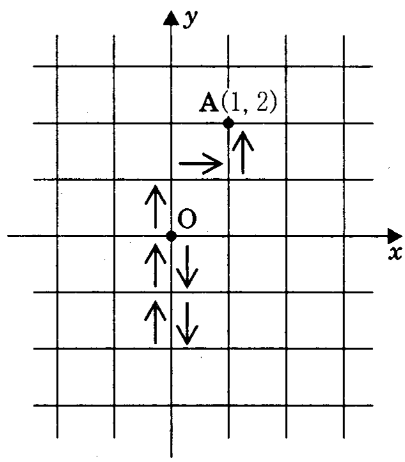
1

xy 平面上の点のうち，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。今，原点より，次の4つの移動(基本移動という)E，W，S，Nをくり返すことによって，点A(1，2)まで移動することを考える。

E，W，S，Nは，格子点$(p，q)$より，それぞれ，$(p+1，q)$，$(p-1，q)$，$(p，q-1)$，$(p，q+1)$への移動を表す。

原点から点Aまでの一つの移動に際して，実施された基本移動をその実施順に並べたものをこの移動の“経路”，その実施回数をこの経路の“道のり”という。また，一つの経路にあらわれる基本移動E，W，S，Nの個数を，それぞれ，e，w，s，nとする。(2つの経路は，道のりが同じで基本移動の並びが同一のときのみ，同じ経路とみなされる。)



例えば，右の図の矢印は，原点から，順にS，S，N，N，N，E，Nと基本移動をくり返すことによる点Aまでの移動を示しているが，この移動では，経路はSSNNNENであり，道のりは7，$e=1$，$w=0$，$s=2$，$n=4$である。

(1) 道のりが7となる経路における e と n が満たすべき条件を求めよ。

(2) 道のりが7となる経路の総数を求めよ。

2

関数$f(x) = ax^3 + (7 - a^2)x^2 + bx + c$は，$x = -1$で極小値を，$x = 2$で極大値をとり，極小値の絶対値の2倍が極大値に等しい。定数a，b，cを求めよ。

3

p を正の定数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = p,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n{}^2 + 2}{2a_n + 1} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。

次の問いに答えよ。

(1) $b_n = \dfrac{a_n - 1}{a_n + 2}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n で表せ。

(2) b_n を n と b_1 で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ。

4

a を 0 でない実数とする。x の関数

$$f(x) = (x^2 + a^2)\sin(\pi x) - \int_{-x}^{x} (t - a)\sin(\pi t)\,dt$$

について次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{d}{dx}f(x)$ を求めよ。

(2) $y = f(x)$ のグラフは a の値によらない定点を通る。その定点の座標をすべて求めよ。

(3) すべての整数 m に対し，$y = f(x)$ のグラフは，区間 $m < x < m + 1$ において x 軸との共有点をただ 1 つもつことを証明せよ。

$\boxed{5}$ （選択問題）

$\boxed{5}-\boxed{\mathrm{a}}$，$\boxed{5}-\boxed{\mathrm{b}}$ のいずれか一方を選択して解答すること。選択した問題の記号（a または b）を解答用紙の所定の箇所に記入すること。

$\boxed{5}-\boxed{\mathrm{a}}$

等式

$$3x^2+y^2+5z^2-2yz-12=0$$

を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$をすべて求めよ。

$\boxed{5}-\boxed{b}$

a, b を $a \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$, $b \neq 1$ を満たす実数とする。
数列 $\{u_n\}$ を

$$u_1 = 1,$$
$$u_{n+1} = au_n + b^n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

(1) 一般項 u_n を推定し，その推定が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ を求めよ。

$\boxed{6}$ （選択問題）

$\boxed{6}-\boxed{a}$，$\boxed{6}-\boxed{b}$ のいずれか一方を選択して解答すること。選択した問題の記号（a または b）を解答用紙の所定の箇所に記入すること。

$\boxed{6}-\boxed{a}$

A，B，C，D を平面上の相異なる 4 点とする。

(1) 同じ平面上の点 P が

$$(*)\quad |\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}|^2=|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}|^2$$

を満たすとき，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ の内積を求めよ。

(2) $(*)$を満たす点 P の軌跡はどのような図形か。

(3) (2)で求めた図形が 1 点のみからなるとき，四角形 ACBD は平行四辺形であることを示せ。

$\boxed{6}$ — $\boxed{b}$

複素数 z と複素数 w の間に

$$w = \frac{z + \alpha}{z + i\alpha}$$

なる関係がある。ただし，α は $|\alpha| = 1$ となる複素数の定数，i は虚数単位である。

(1) $w = 2 - i$ のとき，z は正の実数であるとする。α を求めよ。

(2) $\alpha = i$ とする。w が

$$\frac{2}{9} \leqq \left| w - \frac{1}{3}(4 + i) \right|^2 \leqq \frac{8}{9}$$

を満たすとき，z の表す点が動く範囲を複素数平面上に図示せよ。