6 正の数 a に対して，曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 上の点 $\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を $T(a)$ と書くことにする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_{n+1}=T(a_n)\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。

3つの点 $(a_n,\ 0)$，$\left(a_n,\ \dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$，$(a_{n+1},\ 0)$ を頂点とする三角形の面積を S_n とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

$\boxed{7}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (\sin\sqrt{x+c} - \sin\sqrt{x})$ ただし，c は $c \neq 0$ をみたす定数である。

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

8 2つの曲線 $y = x^2 - x + c$ と $y = 3\log x$ はともにある点Pを通り，しかも点Pにおいて共通の接線をもつとする。このとき，定数 c の値と接線の方程式を求めよ。

9 $f(x)=(x^2+bx+c)e^x$ とする。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int f(x)\,dx$ を求めよ。

(2) 2次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解が，$\log a$ と $\log(a+2)$ であるとする。

このとき，連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq f(x) \\ y \leqq 0 \end{cases}$$

の表す領域の面積を a を用いて表せ。

$\boxed{10}$ x がすべての実数の範囲を動くとき，関数 $f(x)=\int_{x^2}^{2x^2} te^{-t}\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。ただし，e は自然対数の底である。

11 曲線 $y=x^2+\dfrac{1}{4}$ 上の点 $\left(a,\ a^2+\dfrac{1}{4}\right)$ における接線を l とする。ただし，$a>0$ である。次の問いに答えよ。

(1) この曲線の接線で，l に垂直なものを求めよ。

(2) この曲線と l および(1)で求めた接線とで囲まれた部分を，y 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ。

12 次の問いに答えよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ のとき，A^n ($n=2, 3, 4, \cdots$)を求めよ。

(2) 2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$a_1=a$，$a_{n+1}=5a_n-4b_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$b_1=b$，$b_{n+1}=7a_n-5b_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

で定める。

このとき，$a_{28}=0$ かつ $b_{28}=1$ となるように a と b の値を決定せよ。

13 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の x 座標が正の部分を C とする。次の問いに答えよ。

(1) 2点 $(-1,\ 0)$, $(0,\ t)$ を通る直線が C と交わるような t の値の範囲とその交点を求めよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が C 上を動くとき，$2x + y$ の最小値を求めよ。