

7 関数 $f(x) = 5x - \left| 3x + \frac{2}{3} - \log 8 \right| - 2 \log x$ ($x > 0$) の最小値と、最小値をとる x の値を求めよ。自然対数の底 e の値は $2.71\cdots$ である。

- 8 楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上の点 P における接線に原点 O から下ろした垂線を OH とする。線分 PH が最も長くなるときの点 P の座標と PH の長さを求めよ。

- 9 楕円 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 上の点 P における C の法線が, P 以外で C と交わる点を Q とする。点 P が C 上を時計回りに点 $(0, 1)$ から点 $(\sqrt{3}, 0)$ まで動くとき, 点 Q は C 上でどのように動くか。

10 $f(x) = \sin^3 x$ とする。 $0 < a < \pi$ のとき、 x の 2 次関数 $g(x)$ を $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $g(a) = f(a)$ となるように定める。 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq a$) と直線 $x = a$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_a , 曲線 $y = g(x)$ と直線 $x = a$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T_a とする。

(1) S_a, T_a を a の関数で表せ。

(2) $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{S_a}{T_a}$ を求めよ。

11 a を正の定数とする。連立不等式 $x^2 + y^2 \leq 4x$, $y \geq ax$ の表す領域を D_1 とし、連立不等式 $x^2 + y^2 \leq 4x$, $0 \leq y \leq ax$ の表す領域を D_2 とする。 D_1 , D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転してできる 2 つの回転体の体積が等しくなるような a の値を求めよ。

12 正 n 角形の断面をもつまっすぐな角柱を，平らな床の上に寝かせてすべらないように転がしていく。断面の正 n 角形は半径 1 の円に内接する大きさである。角柱が 1 回転する間に，角柱のかどの 1 点が描く軌跡の長さを a_n とする。

(1) a_6 を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

13

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

とする。行列 PAP^{-1} のすべての成分が正となるような $\tan \theta$ の値の範囲を求めよ。

14

座標平面の原点を O とする。 O と異なる点 A に対して点 P を次のように定める。半直線 OA 上に点 B を $OA \cdot OB = 1$ となるようにとって、 B の x 軸に関する対称点を C とし、線分 AC の中点を P と定める。

- (1) 点 A の極座標が (r, θ) のとき、点 P の直交座標を r, θ を用いて表せ。
- (2) 点 A が連立不等式 $\frac{1}{16} \leq x^2 + y^2 \leq 4, \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{3}x$ の表す領域の境界を 1 周するとき、点 P の描く軌跡を図示せよ。