令和７年度入学試験問題

数　　学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，
数学A，数学B，数学C

令和７年２月25日
自　９時00分
至11時30分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A（図形の性質，場合の数と確率），数学B（数列），数学C（ベクトル，平面上の曲線と複素数平面）の問題が**５問**あります。総ページは**13ページ**で，問題は４ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は**５枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**２ヶ所**）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

7　この問題冊子の裏表紙には，試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

試験時間中に机の上に置いてよいもの

○　本学受験票

○　大学入学共通テスト受験票

○　配付した問題冊子等

○　黒鉛筆（和歌，格言等が印刷されているものは不可）

○　鉛筆キャップ

○　シャープペンシル

○　消しゴム

○　鉛筆削り（電動式，大型のもの，ナイフ類は不可）

○　時計（辞書，電卓，端末等の機能があるものや，それらの機能の有無が判別しにくいもの，秒針音のするもの，キッチンタイマーや学習タイマー，大型のものは不可）

○　眼鏡

○　ハンカチ

○　目薬

○　ティッシュペーパー（袋又は箱から中身だけ取り出したもの）

空　白

空　白

〔１〕　次の問いに答えよ。ただし，$\log$ は自然対数を表す。

(1) $x > 0$ で定義された次の関数の最大値を求めよ。

$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

(2) 次の不定積分をそれぞれ求めよ。

$$\int \log x\,dx, \quad \int (\log x)^2\,dx$$

(3) (1) で求めた最大値を a として，座標平面上の二つの曲線 $C_1\colon y = a\sqrt{x}$, $C_2\colon y = \log x$ を考える。x 軸と二つの曲線 C_1，C_2 によって囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

空　白

〔２〕 $a>0$ とし，p を実数とする。座標平面上の3点 $\mathrm{A}(0,a)$，$\mathrm{B}(-1,0)$，$\mathrm{C}(1,0)$ を考える。点 P_n，Q_n，R_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が以下の二つの条件を満たすとする。

(i) 点 P_1 は直線 AB 上にあり，x 座標が p である。

(ii) 自然数 n に対し，

- 点 P_n から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点が Q_n である。ただし，点 P_n が x 軸上にあるときは，点 Q_n は P_n と同じ点であるとする。
- 点 Q_n から直線 AC に下ろした垂線と直線 AC との交点が R_n である。ただし，点 Q_n が直線 AC 上にあるときは，点 R_n は Q_n と同じ点であるとする。
- 点 R_n を通り x 軸と平行な直線と直線 AB との交点が P_{n+1} である。

点 P_n の x 座標を x_n とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 R_1 の座標を a，p を用いて表せ。

(2) 命題

「点 P_1 が線分 AB 上にあるならば，点 R_1 は線分 AC 上にある」

が真であるような a の値の範囲を求めよ。ただし，線分は両端を含むものとする。

(3) x_n を a，n，p を用いて表せ。

(4) $a=2$，$p=0$ であるとき，不等式

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|<10^{-10}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

空　白

〔3〕 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ を満たす θ に対し，座標平面上の原点 $\mathrm{O}(0,0)$ を中心とする半径 1 の円上の 4 点

$$\mathrm{A}(1,0),\ \mathrm{B}(\cos\theta, \sin\theta),\ \mathrm{C}(\cos 2\theta, \sin 2\theta),\ \mathrm{D}(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$$

を考え，$\triangle\mathrm{OAD}$ の面積を $S(\theta)$，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を $T(\theta)$，$\triangle\mathrm{ABD}$ の面積を $U(\theta)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0} \frac{S(\theta)}{\theta}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0} \frac{T(\theta)}{\theta^3}$ を求めよ。

(3) $t = \cos\theta$ とおく。$\dfrac{U(\theta)}{\sin\theta}$ を t の整式で表せ。

(4) 関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = \frac{T(\theta)}{U(\theta)}$$

と定義する。$\displaystyle\lim_{\theta\to+0} f(\theta)$ を求めよ。また，θ が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ の範囲を動くとき，$f(\theta)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

空　白

〔 4 〕 n を自然数とする。$(3n+1)$ 個の箱 A_1, A_2, $\cdots$, A_{3n+1} があり，1 から $3n+1$ までの各自然数 k に対して，k 番目の箱 A_k には，1 から k までの整数が一つずつ書かれた k 枚のカードが入っている。これを初期状態とする。次の問いに答えよ。

(1) 箱 A_{3n+1} に入っているすべてのカードに書かれた整数の平均値 L を n を用いて表せ。

(2) 箱 A_1, A_2, $\cdots$, A_{3n+1} に入っているすべてのカードに書かれた整数の平均値 M を n を用いて表せ。

(3) 初期状態から，箱 A_1, A_2, $\cdots$, A_{3n+1} に入っているすべてのカードを箱 B に移す。箱 B から 1 枚のカードを取り出すとき，カードに書かれた整数が (2) で求めた値 M に等しくなる確率を $P(n)$ とする。$P(n)$ を n を用いて表せ。

(4) M を (2) で求めた値とする。初期状態から，箱 A_M, A_{M+1}, $\cdots$, A_{3n+1} だけ集めて，ケース C に収納する。ケース C から一つの箱を選び，さらにその箱から 1 枚のカードを取り出す。カードに書かれた整数が M に等しいとき，そのカードが箱 A_{3n+1} から取り出されている条件付き確率を $Q(n)$ とする。$\lim_{n\to\infty} nQ(n)$ を求めよ。

空 白

〔5〕　i を虚数単位とする。複素数 z_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$z_1=\sqrt{3}+2i, \qquad z_{n+1}=2(z_n-i)^2+i \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。次の問いに答えよ。

(1) z_2-i と z_3-i を極形式で表せ。

(2) z_n-i を極形式で

$$z_n-i=r_n\,(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$

と表したとき，$\log_2 r_n$ を n を用いて表せ。

(3) z_n を n を用いて表せ。

(4) 複素数 z_n が表す複素数平面上の点を P_n とする。3 点 P_3，P_5，P_{2025} が一直線上にあることを示せ。

空　白