平成 31 年度入学試験問題

数　　学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，
数学A，数学B

平成 31 年 2 月 25 日

自　9 時 00 分

至 11 時 30 分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A，数学B（数列，ベクトル）の問題が **5 問**あります。総ページは **13 ページ**で，問題は 4 ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は **5 枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**2 ヶ所**）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

空　白

空　白

〔１〕　$a>0$，$r>0$ とし，数列 $\{a_n\}$ を初項 a，公比 r の等比数列とする。また，数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される。

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) b_n を a，r および n を用いて表せ。

(2) 一般項が

$$c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$$

である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ。

(3) (2) で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする。すなわち，

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k$$

とする。このとき，一般項が

$$d_n = 2^{M_n}$$

である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ。

空　白

〔2〕 箱の中に 1 から N までの数が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし，N を 2 以上の自然数とする。「カードをよく混ぜて 1 枚取り出し，そのカードに書かれた数を読み取り，そのカードをもとに戻す」という試行を 4 回繰り返す。1 回目，2 回目，3 回目および 4 回目に取り出したカードに書かれた数を，それぞれ a_1，a_2，a_3，a_4 とする。また，座標平面上に 4 点 $\mathrm{P_1}(a_1, 0)$，$\mathrm{P_2}(a_1, a_2)$，$\mathrm{P_3}(a_1 - a_3, a_2)$，$\mathrm{P_4}(a_1 - a_3, a_2 - a_4)$ を定める。次の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P_4}$ が原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ に一致する確率を N を用いて表せ。

(2) $\mathrm{P_4}$ が連立不等式 $x \geqq 0$，$y \leqq 0$ の表す領域にある確率を N を用いて表せ。

(3) $\mathrm{P_4}$ が直線 $y = x$ 上にある確率を N を用いて表せ。

(4) $N = 2^m$ とする。ただし，m を自然数とする。$\mathrm{P_4}$ が原点 O に一致し，かつ，四角形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ の面積が 2^m となる確率を m を用いて表せ。

空　白

〔 3 〕 関数 $f(x)$ は実数全体で連続で，すべての実数 x に対して

$$f(x) = (1 - x)\cos x + x\sin x - \int_0^x e^{x-t} f(t)dt$$

を満たすとする。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ の値を求めよ。また，$f'(x) = 2(x - 1)\cos x$ が成り立つことを示せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) 方程式 $f(x) = 0$ は，$0 < x < \pi$ の範囲にただ一つの解をもつことを示せ。

(4) (3) のただ一つの解を α とする。曲線 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \alpha)$，x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 $y = f(x)$ $(\alpha \leqq x \leqq \pi)$，$x$ 軸および直線 $x = \pi$ によって囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の大小を判定せよ。

空　白

〔４〕　i を虚数単位とし，複素数 z に対して，

$$w = z^2 + 2z + 1 - 2i$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) w の実部が 0 となる複素数 z 全体を複素数平面上に図示せよ。

(2) $w = 0$ を満たす複素数 z の個数は 2 個であることを証明し，それぞれを $a + bi$（a，b は実数）の形に書き表せ。

(3) (2) で求めた二つの複素数のうち実部の大きい方を α，実部の小さい方を β とし，対応する複素数平面上の点をそれぞれ A，B とする。また，線分 AB の中点を M とする。複素数 z に対応する複素数平面上の点が，線分 AM 上（両端を含む）を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(4) 複素数 z に対応する複素数平面上の点が，点 A を通り線分 AB に垂直な直線上を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

空　白

〔５〕　原点を O とする座標平面上において，点 A$(0,3)$，B$(0,-1)$ および x 軸上の正の部分を動く点 P$(t,0)$ があり，∠APB は鈍角でないとする。△ABP の垂心を H，頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D，頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。その交点のことを，三角形の垂心という。

(1) ∠APB が直角となる t の値を求めよ。

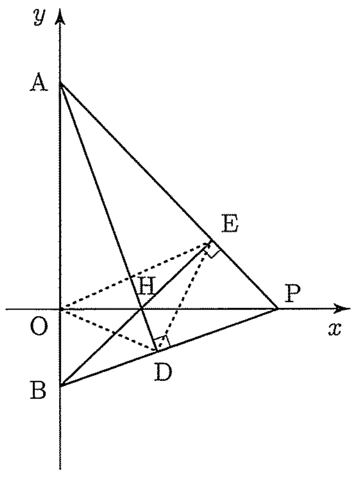
(2) 点 H の座標を t を用いて表せ。

以下では，t が (1) で求めた値よりも大きい値をとるとする。

(3) 点 H が △ODE の内心であることを証明せよ。ただし，1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい。

(4) △ODE の内接円の半径を t の関数 $f(t)$ として表せ。

(5) (4) で求めた関数 $f(t)$ は最大値をもつことを示せ。ただし，最大値を与える t の値を求める必要はない。



空　白