学　力　検　査　問　題

数　　学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，
数学A，数学B

平成30年2月25日
自　9時00分
至11時30分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A，数学B（数列，ベクトル）の問題が**5問**あります。総ページは**13ページ**で，問題は4ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は**5枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**2ヶ所**）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

空　白

空　白

〔 1 〕 次の問いに答えよ。

(1) 次の条件 (A) を満たす座標平面上の点 (u,v) の存在範囲を図示せよ。

(A) 2 次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(2) 次の条件 (B) を満たす座標平面上の点 (u,v) の存在範囲を図示せよ。

(B) 2 次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq 2$ を満たす実数 x，y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(3) 座標平面上の点 (x,y) が 4 点 $(0,0)$，$(1,0)$，$(1,2)$，$(0,2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,xy)$ の動く範囲の面積を求めよ。

空　白

〔2〕 複素数平面上の 4 点 A(α), B(β), C(γ), D(δ) を頂点とする四角形 ABCD を考える。ただし，四角形 ABCD は，すべての内角が 180° より小さい四角形（凸四角形）であるとする。また，四角形 ABCD の頂点は反時計回りに A, B, C, D の順に並んでいるとする。四角形 ABCD の外側に，4 辺 AB, BC, CD, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。次の問いに答えよ。

(1) 点 P を表す複素数を求めよ。

(2) 四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，四角形 ABCD がどのような四角形であることか答えよ。

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるならば，四角形 PQRS は正方形であることを示せ。

空　白

〔 3 〕 次の問いに答えよ。

(1) すべての実数 t に対し，$1+t \leqq e^t$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ の値を求めよ。

(3) 次の不等式を示せ。

$$\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq 2 - \sqrt{2}$$

空　白

〔4〕　0，1，2，3 の数字が一つずつ書かれた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を取り出し，書かれた数字を見て元に戻す。この操作を N 回繰り返し，カードに書かれた数字を順に $Z_1, Z_2, \cdots, Z_N$ とする。ここで，N は 3 以上の自然数である。さらに，複素数

$$\alpha = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$$

を用いて，項数 N の数列 $\{X_n\}$ を

$$X_1 = \alpha^{Z_1}, \quad X_{n+1} = X_n\alpha^{Z_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \cdots, N-1)$$

により定める。$n = 1, 2, \cdots, N$ に対し，$X_n = \alpha$ となる確率を P_n とし，$X_n = \alpha^2$ となる確率を Q_n とする。次の問いに答えよ。

(1) P_1 を求めよ。

(2) $n = 1, 2, \cdots, N-1$ とする。$\alpha^{Z_{n+1}} = 1$ となる確率を求めよ。

(3) $n = 1, 2, \cdots, N$ とする。$X_n = 1$ となる確率を，P_n と Q_n を用いて表せ。

(4) $n = 1, 2, \cdots, N-1$ に対し，P_n を用いて P_{n+1} を表せ。

(5) $n = 1, 2, \cdots, N$ に対し，P_n を求めよ。

空　白

〔５〕　座標平面上で，曲線 $C: y = x^3 - 3x$ と，$b > a^3 - 3a$ を満たすように動く点 $\mathrm{P}(a, b)$ を考える。また，点 P に対し，二つの不等式

$$|x - a| \leqq 1, \quad |y - b| \leqq 1$$

によって表される座標平面上の領域を B とする。領域 B と曲線 C に対して，B と C が共有点 Q をもち，さらに B と C の共有点が B の境界線上にしかないとき，B と C は点 Q で接するということにする。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概形をかき，さらに点 P の座標が $(-2, 3)$ のときの領域 B を図示せよ。

(2) B と C が $x < -1$ の範囲にある点で接するように，点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。

(3) B と C がある点で接するように点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。

(4) (3) の点 P の軌跡は，ある関数 $y = f(x)$ のグラフで表すことができる。この $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ。

空　白