学 力 検 査 問 題

数　学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，
数学A，数学B

平成28年2月25日

自　9時00分

至11時30分

答案作成上の注意

1 この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A，数学B（数列，ベクトル）の問題が**5問**あります。総ページは**13ページ**で，問題は4ページ以降の偶数ページにあります。

2 解答用紙は**5枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3 **受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**2ヶ所**）に必ず記入しなさい。

4 試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。

5 配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

空　白

空　白

〔1〕 座標空間に4点

$$\mathrm{O}(0,0,0),\quad \mathrm{A}(s,s,s),\quad \mathrm{B}(-1,1,1),\quad \mathrm{C}(0,0,1)$$

がある。ただし，$s>0$ とする。t，u，v を実数とし，

$$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ のとき，t を s を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき，u，v を s を用いて表せ。

(3) (2) のとき，2点 D，E を

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$$

となる点とする。四面体 OADE の体積が 2 であるとき，s の値を求めよ。

空　白

〔２〕 次の問いに答えよ。

(1) a を正の定数とする。関数 $f(x) = \dfrac{e^x - ae^{-x}}{2}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2) (1) で求めた $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ。

(3) c を正の定数とする。x 軸，y 軸，直線 $x = c$ および曲線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + c^2}}$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

空　白

〔３〕　複素数平面上を，点 P が次のように移動する。

1. 時刻 0 では，P は原点にいる。時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $Q_1(z_1)$ とすると，$z_1=1$ である。

2. 時刻 1 に P は $Q_1(z_1)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_2(z_2)$ とすると，$z_2=\dfrac{3+i}{2}$ である。

3. 以下同様に，時刻 n に P は $Q_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし n は自然数である。

$\alpha=\dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ。

(1) z_3，z_4 を求めよ。

(2) z_n を α，n を用いて表せ。

(3) P が $Q_1(z_1), Q_2(z_2), \cdots$ と移動するとき，P はある点 $Q(w)$ に限りなく近づく。w を求めよ。

(4) z_n の実部が (3) で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。

空 白

〔 4 〕 xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う。

1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。ただし，点 $(3,1)$ に到達したら Q は原点に戻る。

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を (x_n, y_n) とする。次の問いに答えよ。

(1) $(x_4, y_4) = (0,0)$ となる確率を求めよ。

(2) $(x_8, y_8) = (5,3)$ となる確率を求めよ。

(3) $x_8 + y_8 \leqq 4$ となる確率を求めよ。

(4) $x_{4n} + y_{4n} \leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ。ここで k は n 以下の自然数とする。

空　白

〔５〕　数列

$$x_n = 2^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を考える。この数列は $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \cdots$ であるが，各項の下 1 桁をみると，$1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \cdots$ となっており，2 から循環が始まり循環の周期は 4 である。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 2 桁は，あるところから循環する。循環が始まるところと，循環の周期を求めよ。ここで，1 桁の数に対しては 0 を補って下 2 桁とみなすことにする。たとえば，2 の下 2 桁は 02 とする。

(2) 4 の倍数で，25 で割って 1 余る 2 桁の自然数 A を求めよ。

(3) 8 の倍数で，125 で割って 1 余る 3 桁の自然数 B を求めよ。

(4) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 3 桁は，あるところから循環する。循環が始まるところと，循環の周期を求めよ。ここで，2^m を 125 で割って 1 余るような最小の自然数 m が 100 であることを用いてもよい。

空　白