

学 力 検 査 問 題

数 学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ
数学A，数学B，数学C

平成 22 年 2 月 25 日

自 9 時 00 分

至 11 時 30 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A，数学B（数列，ベクトル），数学C（行列とその応用，式と曲線）の問題が5問あります。総ページは11ページで，問題は偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は5枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は，それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は，解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

〔 1 〕 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換 f によって、点 $P_1(1, 0)$ が点 $P_2(0, 3)$ に移され、点 P_2 が点 P_3 に、点 P_3 が点 $P_1(1, 0)$ にそれぞれ移されるとする。次の問いに答えよ。ただし、 a, b, c, d は実数である。

(1) 行列 A を求めよ。

(2) 自然数 n に対して A^n を求めよ。

(3) $O(0, 0)$ とする。点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ が f によって点 Q に移されるとする。
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ のとき、ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ のとり得る
値の範囲を求めよ。

空 白

〔2〕 p, a を実数の定数とする。多項式 $P(x) = x^3 - (2p + a)x^2 + (2ap + 1)x - a$ を $x - 3$ で割った余りが $10 - 6p$ であり、3 次方程式 $P(x) = 0$ の実数解は a のみとする。次の問いに答えよ。

(1) 実数の範囲で $P(x)$ を因数分解せよ。

(2) a の値を求めよ。

(3) 関数 $y = P(x)$ が極値をもたないときの p の値を求めよ。

空 白

〔3〕 $t > 1$ を満たす実数 t に対して、 $S(t) = \int_0^1 |xe^x - tx| dx$ とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で、方程式 $xe^x = tx$ を満たす x をすべて求めよ。

(2) $S(t)$ を求めよ。

(3) $S(t)$ を最小にする t の値を求めよ。

空 白

〔 4 〕 n は 2 以上の自然数とする。袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている。この袋から無作為に玉を 1 個取り出し、それによって書かれている数を自分の得点としたのち、取り出した玉を袋に戻す。この試行を A, B, C の 3 人が順に行い、3 人の中で最大の得点の人を勝者とする。たとえば、A, B, C の得点がそれぞれ 4, 2, 4 のときは A と C の 2 人が勝者であり、3 人とも同じ得点のときは A, B, C の 3 人とも勝者である。勝者が k 人 ($k = 1, 2, 3$) である確率を $P_n(k)$ とおくと、次の問いに答えよ。

(1) 勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ。

(2) $n = 3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ。

(3) 勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ。

(4) $P_n(1) \geq 0.9$ となる最小の n を求めよ。

空 白

〔5〕 4で割ると余りが1である自然数全体の集合を A とする。すなわち、

$$A = \{4k + 1 \mid k \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}\}$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) x および y が A に属するならば、その積 xy も A に属することを証明せよ。
- (2) 0以上の偶数 m に対して、 3^m は A に属することを証明せよ。
- (3) m, n を 0以上の整数とする。 $m+n$ が偶数ならば $3^m 7^n$ は A に属し、 $m+n$ が奇数ならば $3^m 7^n$ は A に属さないことを証明せよ。
- (4) m, n を 0以上の整数とする。 $3^{2m+1} 7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ。