

学 力 検 査 問 題

数 学

数学 I, 数学 II, 数学 III
数学 A, 数学 B, 数学 C

平成 21 年 2 月 25 日

自 9 時 00 分

至 11 時 30 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には, 数学 I, 数学 II, 数学 III, 数学 A, 数学 B (数列, ベクトル), 数学 C (行列とその応用, 式と曲線) の問題が 5 問あります。総ページは 11 ページで, 問題は偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は 5 枚 (表面) です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号 は, それぞれの解答用紙の所定の欄 (2 ヶ所) に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は, 解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は, 持ち出してはいけません。

〔 1 〕 以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ。

(1) すべての 2 行 2 列の行列 A, B に対して， $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成立する。

(2) 2 行 2 列の行列 A が $A^2 = E$ を満たすならば， $A = E$ または $A = -E$ である。ただし E は単位行列とする。

(3) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a) = 0$ を満たすならば， $f(x)$ は $x = a$ において極値をとる。

(4) n が 2 以上の自然数ならば， $1 + 2 + \cdots + n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

〔2〕 座標平面上の3点 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(x,y)$ を考える。ただし $y > 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め、点 C の存在範囲を図示せよ。

(2) $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め、点 C の存在範囲を図示せよ。

(3) 3つの角 $\angle CAB$, $\angle ABC$, $\angle BCA$ をそれぞれ α , β , γ とし、不等式

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする。そのとき x, y が満たす条件を求め、点 C の存在範囲を図示せよ。

(4) x, y が (3) の条件を満たすとき、 γ がとりうる値の範囲を求めよ。

〔3〕 曲線 $y = e^x$ 上の点 $A(0, 1)$ における接線を ℓ とし、点 $B(0, 2)$ を通り直線 ℓ に平行な直線を m とする。直線 m と曲線 $y = e^x$ の2つの交点 P, Q の x 座標をそれぞれ α, β (ただし $\alpha < \beta$) とする。直線 $x = \alpha$ と直線 ℓ の交点を P' 、直線 $x = \beta$ と直線 ℓ の交点を Q' とする。次の問いに答えよ。

(1) 平行四辺形 $PP'Q'Q$ の面積 S を α, β で表せ。

(2) 直線 m と曲線 $y = e^x$ によって囲まれる図形の面積 T を α, β の多項式で表せ。

(3) 線分 PQ の中点 R は第2象限にあることを示せ。

(4) $\alpha + \beta > -1$ であることを示せ。

〔 4 〕 四面体 OABC において,

$$\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{2}, \quad \angle BOC = \frac{\pi}{3}, \quad OA = OB = 2, \quad OC = 1$$

とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ とする。
 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき, $\vec{p}$ は実数 s, t を用いて

$$\vec{p} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

と表される。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{p} \cdot \vec{a}$, $\vec{p} \cdot \vec{b}$, $\vec{p} \cdot \vec{c}$ を s, t を用いて表せ。
- (2) 点 P が $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$ を満たすとき, s, t の値を求めよ。
- (3) (2) の条件を満たす点 P について, 直線 AP と 直線 BC の交点を Q, 直線 BP と 直線 AC の交点を R とする。BQ : QC および AR : RC を求めよ。
- (4) (2) の条件を満たす点 P について, 3 つの四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積の比を求めよ。

〔5〕 2人のプレイヤー A, B が対戦を繰り返すゲームを行う。1回の対戦につき A が勝つ確率は p であり, B が勝つ確率は $1-p$ であるとする (ただし $0 < p < 1$)。A と B は初めにそれぞれ 2枚の金貨を持っている。1回の対戦につき勝者は敗者から 1枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレイヤーがすべての金貨を手に入れたとき, ゲームを終了する。ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする。ただし n は自然数とする。

(1) P_4 を求めよ。

(2) P_{2n-1} を求めよ。

(3) P_{2n} を求めよ。

(4) $2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ。

(5) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ とする。 p と S の大小関係を調べよ。