

学 力 検 査 問 題

数 学

数学 I, 数学 II, 数学 III
数学 A, 数学 B, 数学 C

平成 20 年 2 月 25 日

自 9 時 00 分

至 11 時 30 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には, 数学 I, 数学 II, 数学 III, 数学 A, 数学 B (数列, ベクトル), 数学 C (行列とその応用, 式と曲線) の問題が**5 問**あります。総ページは **11 ページ**で, 問題は偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は **5 枚** (表面) です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 **受験番号** は, それぞれの解答用紙の所定の欄 (**2 ヶ所**) に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は, **解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は, 持ち出してはいけません。

[1] $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 2×2 行列, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を零行列, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

を単位行列とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 「 $A^3 = O$ ならば $A^2 = O$ が成り立つことを示せ」という問題に対して、次のような解答があった。

$$\text{「 } A^3 = O \text{ ならば } A = O \text{ ①}$$

$$A = O \text{ ならば } A^2 = O \text{ ②}$$

①, ② によって, $A^3 = O$ ならば $A^2 = O$ が成り立つ。」

この解答には誤りがある。解答中の ①, ② のそれぞれについて、正しいかどうかを判定し、正しくない場合は正しくないことを示す例(反例)をあげよ。

- (2) $A^3 = O$ のとき, A は逆行列をもたないことを示せ。

- (3) 「 $A^3 = O$ ならば $A^2 = O$ が成り立つ」ことを証明せよ。ただし、等式

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

が成り立つことは証明なしで用いてよい。

〔2〕 次の問いに答えよ。ただし、 n は自然数を表す。

(1) $0 \leq x \leq 1$ を満たす実数 x に対して、不等式

$$\frac{x}{n+1} \leq \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) \leq \frac{x}{n}$$

が成り立つことを示せ。ただし、対数は自然対数とする。

(2) 次の値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^5$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \left(1 + \frac{1^5}{n^6} \right) \left(1 + \frac{2^5}{n^6} \right) \cdots \left(1 + \frac{n^5}{n^6} \right)$$

で定めるとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

〔3〕 2点 A, B と, その上を動く 1 個の石がある。この石は, 時刻 $t=0$ では点 A にあり, その後, 次の規則 (a), (b) にしたがって動く。

各 $t=0, 1, 2, \dots$ に対して,

(a) 時刻 t に石が点 A にあれば, 時刻 $t+1$ に石が点 A にある確率は c , 点 B にある確率は $1-c$ である。

(b) 時刻 t に石が点 B にあれば, 時刻 $t+1$ に石が点 B にある確率は $2c$, 点 A にある確率は $1-2c$ である。

ただし, c は $0 < c < \frac{1}{2}$ を満たす定数とする。

いま, n を自然数とし, 時刻 $t=n$ において石が点 A にある確率を p_n とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) p_1, p_2 を求めよ。

(2) p_{n+1} を p_n と c を用いて表せ。

(3) p_n を求めよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ。

〔 4 〕 平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は, その大きさがともに $\sqrt{2}$ であり, なす角が 120° である。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 内積 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ を求めよ。

(2) k, ℓ を整数とすると, $|k\vec{a} + \ell\vec{b}|^2$ は偶数であることを示せ。

(3) (2) で, k または ℓ が奇数のとき, $|k\vec{a} + \ell\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではないことを示せ。

(4) m, n が整数であり, $m = n = 0$ ではないならば, $|m\vec{a} + n\vec{b}|$ は整数ではないことを示せ。

- 〔5〕 下図のように、点 O から出る 2 本の半直線 ℓ, m があり、 ℓ と m のなす角を θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする。 ℓ 上に $OP_1 = 1$ となるように点 P_1 を定め、

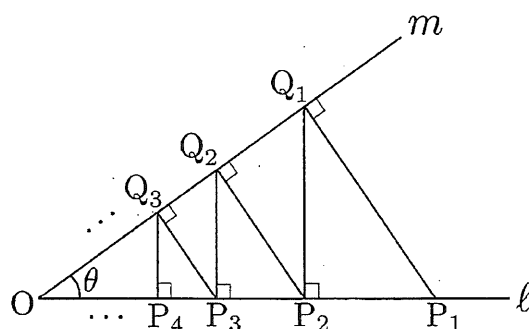
P_1 から m に垂線 P_1Q_1 を下ろし、

Q_1 から ℓ に垂線 Q_1P_2 を下ろし、

P_2 から m に垂線 P_2Q_2 を下ろし、

Q_2 から ℓ に垂線 Q_2P_3 を下ろす。

同様にくりかえして、点 P_n, Q_n ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$) を定め、三角形 $P_nQ_nP_{n+1}$ の面積を S_n とする。



次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{P_2Q_2}{P_1Q_1}$ を求めよ。
- (2) $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。
- (3) $S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求め、 $\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表せ。
- (4) (3) で求めた S を θ の関数と考えて、 S の最大値を求めよ。ただし、その最大値を与える θ の値は求めなくてよい。