

学 力 検 査 問 題

数 学

数学 I, 数学 II, 数学 III
数学 A, 数学 B, 数学 C

平成 18 年 2 月 25 日

自 9 時 00 分

至 11 時 30 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、数学 I, 数学 II, 数学 III, 数学 A, 数学 B (数列, ベクトル), 数学 C (行列とその応用, 式と曲線) の問題が 5 問あります。総ページは 11 ページで、問題は偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は 5 枚 (表面) です。解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄 (2 ヶ所) に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配布した解答用紙は、持ち出してはいけません。

[1] 3×3 行列 A と E を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき、次の問いに答えよ。

(1) A^2 , A^3 を求めよ。

(2) $(xA - E)^3 = xA - E$ を満たす実数 x のうち、正のものをすべて求めよ。

(3) (2) で求めた x のうち最小のものを x_0 とする。自然数 n に対して、 $(x_0A - E)^n = p_nA + q_nE$ を満たす実数 p_n と q_n を求めよ。

空 白

[2] $a_1 = 2, a_2 = 1$ と $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定義される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $b_n = a_{n+1} + a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とするとき、数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列であることを示せ。

(2) $n \geq 2$ のとき、 $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} b_k$ を n の式で表せ。

(3) a_n を n の式で表せ。

(4) 数列 $\left\{ \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\}$ の収束、発散を調べ、収束する場合はその極限値を求めよ。

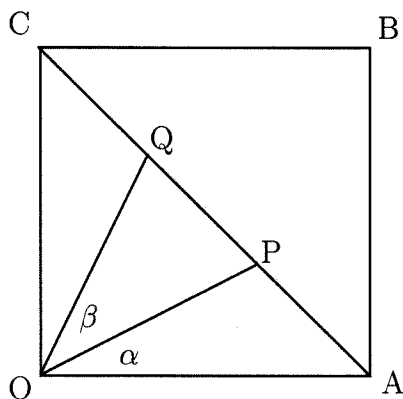
空 白

[3] 正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し、図のように、A に近い点を P、C に近い点を Q とする。また、 $\angle AOP = \alpha$ 、 $\angle POQ = \beta$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ の値を求めよ。

(2) $\alpha < \frac{\pi}{6} < \beta$ を示せ。

(3) 線分 PQ 上に点 R を $\angle POR = \alpha$ となるようにとる。このとき、比 $AR : RC$ を求めよ。



空 白

[4] 赤い袋に 1 から n までの整数を書いた玉が、それぞれ 1 個ずつ、合計 n 個入っている。同様に、白い袋に 1 から n までの整数を書いた玉が、それぞれ 1 個ずつ、合計 n 個入っている。ただし、 $n > 4$ とする。赤い袋から玉を 2 個同時に取り出し、書いてある数を r_1, r_2 とする。次に、白い袋から玉を 2 個同時に取り出し、書いてある数を w_1, w_2 とする。

座標平面上の 4 本の直線 $x = r_1, x = r_2, y = w_1, y = w_2$ で囲まれた四角形を A とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) A の面積が 4 である確率を求めよ。
- (2) $|r_1 - r_2|$ の期待値を求めよ。
- (3) $n = 7$ のとき、 A の面積の期待値を求めよ。

空 白

[5] 関数 $f(x) = x + \frac{x}{x^2 - 1}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の増減と極値を調べて、 $y = f(x)$ のグラフをかけ。
- (2) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = mx$ の交点が、3 個になるような m の値の範囲を求めよ。
- (3) $m < 0$ のとき、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = mx$ で囲まれた二つの部分の面積の和を求めよ。

空 白