

学 力 検 査 問 題

数 学

数学 I, 数学 II, 数学 III

数学 A, 数学 B, 数学 C

平成 17 年 2 月 25 日

自 9 時 00 分

至 11 時 30 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、数学 I, 数学 II, 数学 III, 数学 A (数と式, 数列), 数学 B (ベクトル, 複素数と複素数平面), 数学 C (行列と線形計算, いろいろな曲線) の問題が 5 問あります。総ページは 11 ページで、問題は偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は 5 枚 (表面) です。解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号 は、それぞれの解答用紙の所定の欄 (2 ヶ所) に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。

〔1〕 行列 I と J が

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるとき、次の問いに答えよ。

(1) 行列

$$J^2, \quad J^3, \quad J^4$$

は、それぞれ、 I または J の定数倍になることを示せ。

(2) 実数 a と b について、行列

$$aI + bJ$$

が逆行列をもつための必要十分条件を求めよ。

(3) 任意の実数 s, t に対して、行列

$$sI + (1 + st)J + tJ^2 + st^2J^3 + t^2J^4$$

は逆行列をもつことを示せ。

空 白

〔2〕 正の実数 a, b, c を係数とする 3 次方程式

$$(*) \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

が、純虚数の解をもつとする。次の問いに答えよ。

(1) $ab - c$ の値を求めよ。

(2) 複素数平面上で方程式 $x^3 + 8 = 0$ の 3 個の解が表す点を頂点とする三角形を考える。方程式 $(*)$ の解が表すすべての点がこの三角形の頂点または辺上にあるとき、 a, b, c の値を求めよ。

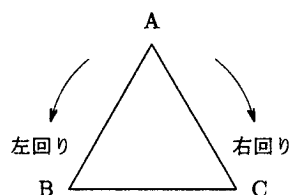
空 白

〔3〕 2枚のコインを同時に投げて、三角形 ABC の1つの頂点にある駒を、

2枚とも表が出たとき、左回りで隣の頂点に移し、

2枚とも裏が出たとき、右回りで隣の頂点に移し、

表と裏が出たとき、動かさない



という試行を考える。初めに駒を頂点 A に置く。この試行を n 回繰り返したとき、1 回目の試行後の駒の位置を X_1 、2 回目の試行後の駒の位置を $X_2, \dots, n$ 回目の試行後の駒の位置を X_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) この試行を 2 回繰り返したとき、 X_2 が A である確率 P_2 を求めよ。
- (2) この試行を 4 回繰り返したとき、最後の X_4 のみが A である確率 Q_4 を求めよ。
- (3) この試行を n 回 ($n \geq 2$) 繰り返したとき、最後の X_n のみが A である確率 Q_n を求めよ。
- (4) この試行を n 回 ($n \geq 2$) 繰り返したとき、 X_n が A である確率 P_n を求めよ。

空 白

〔4〕 実数全体で定義された関数

$$f(x) = \frac{4x + a}{x^2 + 1}$$

は, $x = \frac{1}{2}$ で極値をもつ。ただし, a は定数である。次の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_0^1 f(x) dx$ の値を求めよ。

空 白

〔5〕 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{1}{2}$ の増減を調べて極値を求めよ。

(2) 公式

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

を用いて、 $k = \cos \frac{2\pi}{9}$ は方程式 $f(x) = 0$ の解であることを示せ。

(3) $k > \frac{3}{4}$ であることを示せ。

(4) 方程式 $\cos x = x$ の解を α とするとき、

$$\frac{2\pi}{9} < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

を示せ。ここで、 $3.14 < \pi < 3.15$ を利用してもよい。

空 白