

[1] θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし, 複素数平面において $0 \leq \arg z \leq \pi - \theta$ を満たすすべての点 $z (\neq 0)$ と点 0 からなる集合を D とする。

(1) 複素数平面上に D を図示せよ。

(2) a を $a > 0$ を満たす実数とする。このとき, D に属する点 z に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$|z| \sin \theta \leq |z + a|$$

また, 等号が成り立つときの z を a, θ を用いて表せ。

[2] $S_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ について、 $\frac{1}{\pi(n+1)^2} \leq S_n \leq \frac{1}{\pi n^2}$ が成り立つことを示せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k}$ の値を求めよ。

[3] a を $2 < a < 3$ を満たす定数とし,

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(e^x - 1 + \frac{a - e^x}{a - 2} - \left| e^x - 1 - \frac{a - e^x}{a - 2} \right| \right)$$

とおく。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (2) $y = f(x)$ のグラフの $y \geq 0$ の部分と x 軸とで囲まれる図形を直線 $x = \log 2$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

[4] F君はG君の投げるボールを確率 p ($0 < p < 1$) でヒットにする。自然数 n に対して、1 から n までの数字を1つずつ記入した n 枚のカードが入った箱 B_n がある。G君が箱 B_n から勝手にカードを1枚引いて、カードに書かれている数字の回数だけF君にボールを投げる試行を考える。

(1) 箱 B_k を用いた試行でF君が k 本ヒットを打つ確率を q_k 、また箱 B_{k+1} を用いた試行でF君が k 本ヒットを打つ確率を r_k とするとき、 $(k+1)r_k - kq_k$ を p 、 k を用いて表せ。

(2) 箱 B_k を用いた試行でF君が j 本ヒットを打つ確率を q_j ($0 \leq j \leq k$)、箱 B_{k+1} を用いた試行でF君が j 本ヒットを打つ確率を r_j ($0 \leq j \leq k+1$) とするとき、 $(k+1)r_j - kq_j$ ($0 \leq j \leq k$) を p 、 k 、 j を用いて表せ。

(3) 箱 B_n を用いた試行でF君が j 本ヒットを打つ確率を p_j ($0 \leq j \leq n$) とし、 $\alpha = pt + 1 - p$ とすると、変数 t に関して次の等式が成り立つことを示せ。

$$p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n = \frac{1}{n} (\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)$$

(4) 箱 B_n を用いた試行において、F君が打つヒットの数の期待値 E を n 、 p を用いて表せ。

[5] a, b を $a^2 - 4b < 0$ を満たす実数とする。

(1) 実数を成分とする 2 次の正方行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が等式

$$(*) \quad X^2 - aX + bE = O$$

を満たすならば,

$$x + w = a, \quad xw - yz = b$$

が成り立つことを示せ。ただし, O は 2 次の零行列であり, E は 2 次の単位行列である。

(2) 等式(*)を満たす実数を成分とする 2 次の正方行列全体の集合を S とする。 S に属する行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対し, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(**) \quad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \geq 2b$$

また, 等号が成り立つときの X を a, c を用いて表せ。ただし, $c = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$ とする。

(3) A, B を不等式(**)において等号が成り立つ S に属する 2 つの相異なる行列とする。このとき,

$$(X - A)(X - B) = O$$

を満たす S に属する行列 X は A または B であることを示せ。