〔**1**〕 z は $0° < \arg z < 90°$ を満たす複素数とし，複素数平面上の 3 点 O(0)，A(1)，B(z) を頂点とする△OAB を考える。また，$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とおく。

(1) $\alpha^2 - \alpha + 1$ の値を求めよ。

(2) 点 P(w) を，直線 OB に関して点 A と反対側に，△POB が正三角形になるようにとる。複素数 w を z と α を用いて表せ。

(3) 点 Q($z + \alpha - \alpha z$) に対し，△ABQ は正三角形であることを示せ。

(4) $\arg\left(\dfrac{z + \alpha - \alpha z}{w - 1}\right)$ を求めよ。ただし，偏角の範囲は，0° 以上 360° 未満とする。

〔2〕 $a>0$ とし，極方程式 $r=2a\sin\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ で表される曲線を C とする。

(1) 曲線 C は円の一部であることを示し，その円の中心と半径を求めよ。さらに，曲線 C を図示せよ。

(2) 曲線 C と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，x 軸の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ。

〔 **3** 〕 数列 $\{a_n\}$ は，関係式

$$a_1 = 2,\ (a_{n+1} - a_n)^2 = 2(a_{n+1} + a_n),\ a_{n+1} > a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定まっている。

(1) a_2，a_3，a_4 を計算せよ。

(2) 一般項 a_n を n の式で表せ。

(3) $\lim_{n \to \infty}(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$ を求めよ。

〔 **4** 〕 次のそれぞれの問いに答えよ。

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ が $AB = O$ を満たすとき，行列 A の 4 つの成分の積 $abcd$ は正または 0 であることを示せ。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持たず，3 つの成分が正であるとき，残りの 1 つの成分も正であることを示せ。

(3) A，B を 2×2 行列とする。$AB = O$ かつ $B \neq O$ ならば，A の逆行列 A^{-1} は存在しないことを示せ。

〔5〕 関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して

$$f(x)=x^2-\int_0^x (x-t)f'(t)dt$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ の値を求め，さらに $f'(x)=2x-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $(e^x f(x))'=2xe^x$ を示せ。

(3) $f(x)$ を求めよ。

〔6〕 A，B，Cの3人が優勝決定戦を行う。まず3人のうち2人が対戦し，その勝者が残りの1人と対戦する。これをくり返して，2回続けて勝ったものを優勝者とする。AとBが対戦したときにそれぞれが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ とし，CがAまたはBと対戦したときにCが勝つ確率は p $(0 < p < 1)$，負ける確率は $1-p$ であるとする。

第1回戦はAとBの対戦として次の問いに答えよ。

(1) 第2回戦では第1回戦の勝者が残りのCと対戦する。Cが負ければ勝者は優勝者となるが，Cが勝てばCは第1回戦の敗者と第3回戦を行う。第3回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者を順に並べると，ACCとBCCの2通りの順列が得られる。第4回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者の順列を答えよ。

(2) 第 m 回戦で優勝者が決まる確率を F_m とする。F_2，F_3，F_4をそれぞれ求めよ。

(3) 2以上の自然数 n に対して，確率 F_{3n} を求めよ。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} F_{3n}$ を計算せよ。