

平成21年度入学者選抜試験  
個別学力試験問題（前期日程）

数 学  
(医学部医学科)

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけない。
2. 問題紙は2ページ，解答用紙は4枚である。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入すること。
4. 解答用紙の裏面は使わないこと。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときは，小問の結論を明示すること。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ること。

- 1 公正に作られた  $n$  枚のコインを同時に投げるとき、表が出た枚数を  $k$  で表す。この  $k$  に対して、2つの放物線

$$C_1: y = x^2 + kx, \quad C_2: y = -x^2 + k^2 + \frac{9}{4}k + \frac{9}{8}$$

で囲まれた図形の面積を  $S_k$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $S_k$  を求めよ。
- (2)  $S_k \leq 9$  となる確率を  $n$  を用いて表せ。
- (3)  $n = 5$  のとき、 $\left(\frac{8}{9}S_k\right)^{\frac{1}{3}}$  の期待値を求めよ。

- 2 空間に4点  $O(0,0,0)$ ,  $A(0,0,1)$ ,  $B(2,0,0)$ ,  $C(0,2,0)$  がある。点  $O$  から  $\triangle ABC$  に垂線を下ろしたときの交点を  $H$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $a, b$  を実数とする。 $\vec{v} = (a, b, 1)$  としたとき、 $\vec{v}$  がベクトル  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  の両方に直交するような  $a, b$  の値を求めよ。
- (2) ベクトル  $\overrightarrow{OH}$  の成分表示を求めよ。
- (3) 四面体  $OABC$  の体積  $V$  および  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求めよ。
- (4) 四面体  $OABC$  に内接する球の半径  $r$  を求めよ。

3  $a > 0$  とするとき、関数  $f(x) = a \sin 2x - \cos^2 x$  について、次の問いに答えよ。

- (1) 方程式  $f(x) = 0$  は区間  $(0, \frac{\pi}{2})$  にただ 1 つの解  $t$  をもつことを示せ。  
また、この解  $t$  と  $a$  との関係式を求めよ。
- (2) 積分  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx$  を (1) で定めた  $t$  を用いて表せ。
- (3)  $t$  の関数として表された積分  $I$  の最小値とそのときの  $a$  の値を求めよ。

4  $a, b$  を 0 でない実数とし、 $X = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ 、 $S = \{X^n \mid n \text{ は自然数}\}$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$  のとき、 $S$  の異なる要素をすべて求めよ。
- (2) すべての自然数  $k$  に対して  $X^{2k-1} = (2ab)^{k-1}X$  となることを示せ。
- (3)  $S$  の要素は 3 個ではないことを示せ。