令 和 7 年 度

前 期 日 程

数　　　学

教育学部［数学（ロ）］

医学部医学科

工学部

応用生物科学部［数学（ロ）］

問 題 冊 子

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は5ページで，解答用紙は5枚である。
   落丁，乱丁，印刷不鮮明などの箇所があった場合には，ただちに試験監督者に申し出ること。
3. **受験番号は，5枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。**
4. 問題は，大問5題である。
5. **大問の配点比率は全て20％である。**
6. **解答は，解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし，やむをえない場合は裏面にまわってよいが，表面に「裏に続く」と明記すること。**
7. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
8. 解答用紙は持ち帰らないこと。
9. 問題冊子は持ち帰ること。

1　$0 < \alpha < 1$とする。面積が2である$\triangle$OABにおいて，辺ABを$\alpha : (1-\alpha)$に内分する点をP，辺OBを$1:2$に内分する点をQとする。また，線分OPとAQの交点をDとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$として，以下の問に答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$および$\alpha$を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$および$\alpha$を用いて表せ。

(3)　$|\vec{b}| = 2$，$\angle\mathrm{AOP} = \dfrac{1}{2}\theta$，$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$とする。このとき$\alpha$の値を求めよ。

(4)　(3)の条件のもとで，$\triangle$OADの面積を求めよ。

2 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 4,\ a_{n+1} = 2^{n+1} \cdot \sqrt{a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とし，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \log_2 a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める。以下の問に答えよ。

(1) a_2，b_1，b_2 を求めよ。

(2) b_{n+1} を b_n と n を用いて表せ。

(3) $c_n = b_{n+1} - b_n$ とする。c_n を n を用いて表せ。

(4) 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。

(5) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの積を $P_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ とおく。$\log_2 P_n$ を求めよ。

3 1から5までの番号が1つずつ書かれた5枚のカード$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$がある。この5枚のカードを，下から順番に$\boxed{5}$，$\boxed{4}$，$\boxed{3}$，$\boxed{2}$，$\boxed{1}$と重ねていき，1番上に$\boxed{1}$がくるようにカードの山をつくる。このカードの山に以下の試行Tを続けて行うことを考える。以下の各問ではこのカードの山から試行を始める。

[試行T] カードの山の1番上にあるカードを取り，残り4枚のいずれかのカードの下に入れる。ただし，どのカードの下に入れる確率も同じとする。

例えば，試行Tを3回続けて行うとする。このとき，2回目の試行は，1回目の試行の結果，カードの山の1番上になったカードに対して行う。3回目の試行も，2回目の試行の結果，カードの山の1番上になったカードに対して行う。以下の問に答えよ。

(1) 試行Tを2回続けて行うとき，2回の試行の結果，$\boxed{3}$がカードの山の1番上になる確率を求めよ。

(2) 試行Tを5回続けて行うとき，1回目は1番上のカードが$\boxed{5}$より上に入り，1回目以外の回は$\boxed{5}$より下に入る確率を求めよ。

(3) 試行Tを5回続けて行うとき，2回目は1番上のカードが$\boxed{5}$より上に入り，2回目以外の回は$\boxed{5}$より下に入る確率を求めよ。

(4) 試行Tを5回続けて行うとき，5回の試行の結果，$\boxed{5}$がカードの山の1番上になる確率を求めよ。

(5) 試行Tを5回続けて行うとき，5回の試行の結果，$\boxed{4}$がカードの山の1番上になる確率を求めよ。

4 n を自然数とする。$z_1=1$, $z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とし，複素数 z_{n+2} を

$$z_{n+2}\overline{z_{n+1}}=z_{n+1}\overline{z_n}$$

を満たすように定める。ただし，i は虚数単位であり，複素数 $\overline{z_n}$ は z_n の共役な複素数とする。以下の問に答えよ。

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\theta+i\sin\theta$ となる θ で $0\leqq\theta<2\pi$ を満たすものを求めよ。

(2) $|z_n|$ を求めよ。

(3) $\dfrac{z_{n+1}}{z_n}$ の実部を a_n，虚部を b_n とする。a_n と b_n を求めよ。

(4) z_n の虚部を y_n とする。$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}y_n$ の値を求めよ。

5 関数

$$f(x) = e^{3x} - 5e^{2x} + 8e^{x} - 4$$

を考える。ただし，e は自然対数の底とする。以下の問に答えよ。

(1) 整式 $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ を因数分解せよ。

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(3) k は実数とする。曲線 $y = ke^{x} - 4$ と曲線 $y = f(x)$ の共有点が 2 個となるような k の値の範囲を求めよ。

(4) k が (3) で求めた範囲にあるとき，曲線 $y = ke^{x} - 4$ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積が 9 となるような k の値を求めよ。