山形大学

平成 24 年度入学者選抜試験問題

医学部医学科

数　　学

前　期　日　程

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません．

2　解答用紙４枚と下書き用紙４枚は問題冊子とは別になっています．

3　問題は「第１問」,「第２問」,「第３問」,「第４問」の４問です．

4　問題の解答を，それぞれ対応した番号の解答用紙に書きなさい．

5　試験中に問題冊子の印刷不鮮明・落丁・乱丁，解答用紙の汚れなどに気が付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください．

6　監督者の指示にしたがって，４枚の解答用紙それぞれに**学部名**と**大学受験番号**を正しく記入しなさい．**学部名**と**大学受験番号**が正しく記入されていない場合は，採点されないことがあります．

7　定規は，使用してもかまいません．

8　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は持ち帰ってください．

第1問

袋の中に 1 から 8 までの数字が 1 つずつ重複せずに書かれた 8 枚のカードが入っている．袋の中からカードを 1 枚取り出して，もとに戻すという操作を 4 回繰り返す．1 回目，2 回目，3 回目，4 回目に取り出されたカードに書かれた数をそれぞれ a, b, c, d とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $a+b+c+d=6$ となる確率を求めよ．

(2) 積 $abcd$ が奇数となる確率を求めよ．

(3) $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)=0$ となる確率を求めよ．

(4) $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{2}{cd}=\dfrac{1}{2}$ となる確率を求めよ．

第２問

数列 $\{a_n\}$ が条件

$$a_1 = -\frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = a_n^2 - \frac{1}{4} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定められている．このとき，次の問に答えよ．

(1) 不等式 $-\dfrac{1}{4} \leqq a_n < 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $a_{2n-1} < a_{2n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(3) 不等式 $a_{2n} > a_{2n+2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(4) 不等式

$$0 < a_{2n} - a_{2n-1} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+1)} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ．

第３問

自然数 n に対して

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{2k-2}, \qquad R(x) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

とする．さらに

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 等式 $\displaystyle\int_0^1 S(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1}$ が成り立つことを示せ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ．

(3) 等式 $S(x) = f(x) - R(x)$ が成り立つことを示せ．

(4) 不等式 $\displaystyle\left|\int_0^1 R(x)\,dx\right| \leqq \frac{1}{2n+1}$ が成り立つことを示せ．

(5) 無限級数 $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ の和を求めよ．

第4問

2 次正方行列

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \\ \dfrac{5\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1-3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えよ．

(1) A, B は逆行列をもつことを示し，A^{-1}, B^{-1} を求めよ．

(2) $B^{-1}A^{-1}B$, $(B^{-1}A^{-1}B)^3$ を求めよ．

(3) $A^7BX=B$ をみたす 2 次正方行列 X を求めよ．

(4) (3) の行列 X について

$$E+X^5+X^{10}+X^{15}+X^{20}+X^{25}=O$$

が成り立つことを示せ．ただし E は 2 次の単位行列，O は零行列とする．