平成30年度　入学者選抜学力検査問題

数　学（理系β）

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子及び解答用紙の中を見てはいけません。
2. 問題は全部で4題あります。また，解答用紙は4枚あります。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の枚数の過不足や汚れ等に気がついた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号，志望学部及び氏名を記入してください。受験番号の記入欄は各解答用紙に2箇所あります。
5. 解答は各問，指定された番号の解答用紙のおもて面にだけ記入してください。
6. 指定された番号以外の解答用紙に解答を記入した場合，採点の対象となりません。
7. 裏面その他に解答を記入した場合，その部分は採点の対象となりません。
8. 各問題の配点50点は200点満点としたときのものです。
9. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

〔1〕 (配点 50)　n を自然数とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 方程式 $z^n = 1$ の解をすべて求め，極形式で表しなさい。ただし，解 z の偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(2) (1)で得られた解を偏角が小さい順に c_0, c_1, c_2, $\cdots$, c_{n-1} とおく。このとき，すべての $k = 0$, 1, 2, $\cdots$, $n-1$ に対して，

$$|c_{k+1} - c_k| = \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right)}$$

が成り立つことを示しなさい。ただし，$c_n = c_0$ とする。

(3) (2)の c_k に対して $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} |c_{k+1} - c_k|$ とするとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めなさい。

〔2〕 (配点 50) 実数 t に対して，xy 平面上で曲線

$$C: y = -x^3 + 3t^2x - 2t^3 \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

を考える。t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，曲線 C が通過する領域を図示し，その面積 S を求めなさい。

〔3〕 (配点 50) n を自然数とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 連続な関数 $f(x)$ が区間 [0, 1] で増加するとき，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leqq \int_0^1 f(x)dx \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

が成り立つことを示しなさい。

(2) a が正の有理数のとき，

$$n^{a+1} \leqq (a+1)\sum_{k=1}^{n} k^a \leqq (n+1)^{a+1}$$

が成り立つことを示しなさい。ただし，x^a が連続な関数であることを証明なしに用いてもよい。

〔4〕 (配点 50) n を自然数とする。正三角形 OAB の各辺を n 等分してできる点を通り，辺 OA，OB，AB に平行な直線をすべて引く。これらの直線と辺 OA，OB，AB の中の 3 本によって作られる正三角形のうち，正三角形 OAB からはみ出ないものを考える。そのような正三角形の個数を t_n とする。ただし，$n=1$ のときは正三角形 OAB のみを考えて，$t_1=1$ とする。このとき，次の問いに答えなさい。

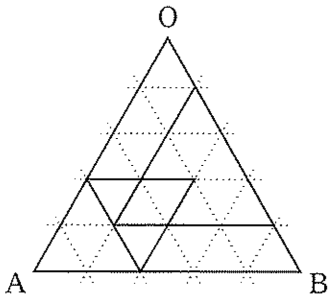
(1) $t_2=5$ である。t_3 の値を求めなさい。

(2) 1 辺が辺 AB 上にある正三角形の個数を n を用いて表しなさい。

(3) 辺 AB と 1 点のみを共有する正三角形の個数を，n が偶数と奇数の場合に分け，n を用いて表しなさい。

(4) $u_n=t_{2n-1}$ とおくとき，$u_{n+1}-u_n$ を n を用いて表しなさい。

(5) n が奇数のとき，n を用いて t_n を表しなさい。



図：$n=5$ の場合