平成21年度　入学者選抜学力検査問題

数　　学　（理系β）

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子及び解答用紙の中を見てはいけません。
2. 解答用紙は，４枚あります。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気がついた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号，志望学部及び氏名を記入してください。受験番号の記入欄は各解答用紙に２箇所あります。
5. 解答は各問，指定された番号の解答用紙の<u>おもて面にだけ</u>記入してください。
6. 解答を指定された番号以外の解答用紙に記入した場合，採点の対象となりません。
7. 裏面その他に解答を書いた場合，その部分は採点の対象となりません。
8. 各問題の配点50点は200点満点としたときのものです。
9. 試験終了後，問題冊子と計算用紙は持ち帰ってください。

$\boxed{\beta}$

〔1〕 (配点 50) 数列$\{x_n\}$を

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

により定める。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) すべての自然数nに対して

$$\frac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$$

が成り立つことを証明しなさい。

(2) すべての自然数nに対して

$$|x_{n+1} - x_n| \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

が成り立つことを証明しなさい。

(3) 極限値

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} x_n$$

を求めなさい。(数列$\{x_n\}$が収束することは証明しなくてよい。)

$\boxed{\beta}$

〔2〕（配点 50） 媒介変数表示された曲線 C

$$x = 2\theta - \sin\theta,\ y = 2 - \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

に対して，次の問いに答えなさい。

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}$，$\dfrac{dy}{d\theta}$ を計算しなさい。

(2) $\dfrac{dx}{d\theta} > 0$ であることを示し，x がとる値の範囲を求めなさい。

(3) 曲線 C を表す関数を $y = f(x)$ とする。$\dfrac{dy}{dx}$ を θ の関数として表しなさい。

(4) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べなさい。

(5) 曲線 C，x 軸および 2 直線 $x = 0$，$x = 4\pi$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

〔3〕 (配点50) 放物線 $y=x^2$ を C_1 とし，$y=ax^2+bx+c$ （a，b，c は実数，$a \neq 0$）を C_2 とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) C_1 上の点 $\mathrm{Q}(s,\ s^2)$ における C_1 の接線が，C_2 上の点 $\mathrm{P}(t,\ at^2+bt+c)$ を通るとする。このとき，a，b，c，s，t がみたす関係式を求めなさい。

(2) (1)で求めた関係式を s についての2次方程式としてみたとき，この方程式が異なる2つの実数解をもつための a，b，c，t についての条件を求めなさい。

(3) C_2 上に点Pをとり，Pから C_1 へ接線を引くことを考える。Pのとり方によらず，常にPから C_1 へ異なる2本の接線が引けるための a，b，c についての条件を求めなさい。

〔4〕 (配点 50) 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正七角形の各頂点 P_1, P_2, …, P_7 から長さが最大となる対角線を 2 本ずつ引き，それらの交点のうち Q_1, Q_2, …, Q_7 を図のように定める。また, $\alpha = \sin\dfrac{2\pi}{7}$, $\beta = \tan\dfrac{\pi}{14}$ とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 正七角形 $P_1P_2\cdots P_7$ の面積を α を用いて表しなさい。

(2) 点 Q_1 から線分 P_1O へ垂線を下し，その交点を H とする。線分 Q_1H の長さを β を用いて表しなさい。

(3) 点 P_1, Q_1, P_2, Q_2, …, P_7, Q_7, P_1 を順番に線分で結ぶことによって囲まれた図形(図の灰色の部分)の面積を β を用いて表しなさい。