前期日程

医学部医学科試験問題

数　　学

注　　意

1. 開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題は 1 ページから 3 ページにわたっています。問題冊子が不備な場合は，直ちにその旨を監督者に申し出て下さい。
3. 解答用紙は 3 枚で，問題冊子とは別になっています。各解答用紙には志望学部を書く欄が 1 か所と受験番号を書く欄が 2 か所あります。もれなく記入して下さい。
4. 解答は指定された解答用紙に記入して下さい。その際，解答用紙の番号を間違えないようにして下さい。
5. 解答用紙の裏面には解答を書いてはいけません。
6. 解答用紙は一切持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子，計算用紙は持ち帰って下さい。

$\boxed{\mathrm{I}}$ 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \dfrac{e^{x-1}}{2x}$ $(x > 0)$ のグラフをかけ。また，y のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$2(k-1)\pi \leqq t \leqq 2k\pi$ を満たし，かつ，$\sin t$ の値が (1) で求めた範囲に含まれるような t の値の範囲 $a_k \leqq t \leqq b_k$ を求めよ。

(3) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} e^{-t} \sin t \, dt$ とする。I_n を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

（解答用紙は，$\boxed{\mathrm{I}}$ を使用せよ）

$\boxed{\text{医 I}}$

◇M9(631—54)

$\boxed{\text{II}}$ 次の問いに答えよ。

(1) k を正の整数とし，$x>0$ に対して

$$f(x)=\frac{1}{k+1}(x+\alpha)-\sqrt[k+1]{\beta x}$$

とおく。ただし，α，β は

$$\alpha>0,\ \beta>0,\ \frac{\alpha}{k}\geqq\sqrt[k]{\beta}$$

を満たす定数である。このとき，$f(x)\geqq 0$ であることを示せ。

(2) n を正の整数とする。$x_1>0,\ x_2>0,\ \cdots,\ x_n>0$ のとき

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

が成立することを示せ。

(3) M を正の定数とし，5 個の正の数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 が $a_1a_2a_3a_4a_5=M$ を満たしているとする。a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 から取り出した 3 つの数の積 $a_ia_ja_k$ を S_{ijk} と表すことにする。$1\leqq i<j<k\leqq 5$ を満たすすべての整数 i, j, k についての S_{ijk} の和を S とおく。このとき，$S\geqq 10\sqrt[5]{M^3}$ であることを示せ。

（解答用紙は，$\boxed{\text{II}}$ を使用せよ）

医 II

III $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{16}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{17}{3} \end{pmatrix}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $A\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす x, y を求めよ。

(2) (1) で求めた x, y に対して

$$B\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たす a, b, c, d を求めよ。

(3) $AB = BA$ であることを示せ。

(4) 表の出る確率が p，裏の出る確率が $1-p$ である硬貨を用意する。ただし，p は $0 < p < 1$ を満たす定数である。$X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ とし，X_1, X_2, X_3, $\cdots$ を次のように決める：

X_{n-1} が決まったとき，硬貨を投げて表が出れば $X_n = AX_{n-1}$，
裏が出れば $X_n = BX_{n-1}$ によって X_n を決める。

$X_n = \begin{pmatrix} t_n \\ s_n \end{pmatrix}$ とおくとき，t_n の期待値 T_n と s_n の期待値 S_n をそれぞれ求めよ。

(5) p が $0 < p < 1$ を満たすどのような定数であっても，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}({T_n}^2 + {S_n}^2) = \infty$ であることを示せ。

（解答用紙は，**III** を使用せよ）

医 III