物 理 問 題

（解答はすべて物理解答用紙に記入すること）

〔1〕 図のように，ピストンのついたシリンダーが，台の上に鉛直に置かれている。ピストンの質量はMである。シリンダーの内壁はあらく，ピストンには摩擦力がはたらく。ピストンはシリンダーの底面と，質量が無視できるばね定数kのばねで接続されている。最初，ピストンを手で支え静止させた。このとき，ばねの長さは自然長になっていた。時刻$t=0$でピストンを支えていた手をそっと放したところ，ピストンはシリンダー内を降下し始めた。これは，ピストンに限界の静止摩擦力（最大摩擦力）を越える力が鉛直下向きにはたらいたためである。降下するピストンには一定の大きさfの動摩擦力がはたらいた。$t=0$でのピストンの位置を原点に，鉛直下向きを正として図のようにx軸をとり，時刻tでのピストンの位置（座標）をxで表す。重力加速度の大きさをgとして，以下の問いに答えよ。ただし，シリンダーの下部には穴があり，内部の気体の圧力の影響はない。また，ばねの方向は常に鉛直方向に保たれる。

問 1 降下するピストンが位置xにあるとき，ピストンが受ける力を，鉛直下向きを正として求めよ。

問 2 降下するピストンは次第に速さを増し，最大の速さに達した後，減速した。最大の速さに達した瞬間でのピストンの位置を求めよ。

問 3 その後，時刻$t=t_1$でピストンの速さは0になった。t_1を求めよ。このときのピストンの位置x_1を求めよ。

問 4 時刻$t=0$から$t=t_1$までの間に，摩擦力がピストンに対してした仕事を，符号も含めて求めよ。答はx_1を含んだ式で表せ。

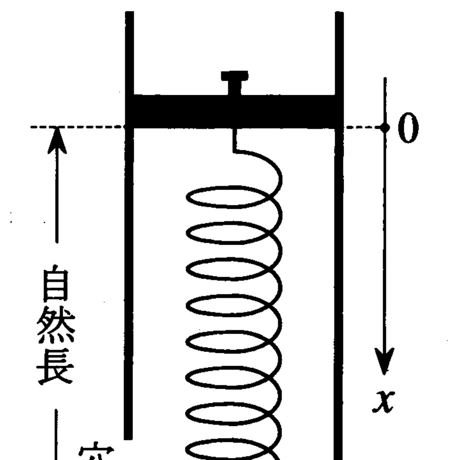
問 5 時刻$t=t_1$でのピストンとばねからなる系の力学的エネルギーは，時刻$t=0$での値と比べて，増加したか，減少したか。解答欄の正しいものを○で囲め。このエネルギー変化の大きさ（絶対値）を求めよ。答はx_1を含んだ式で表せ。

問 6　ピストンは，時刻 $t = t_1$ に上昇を始めた。ピストンが上昇するためには，いったん静止したピストンに，最大摩擦力 f_s を上回る力が鉛直上向きにはたらく必要がある。ピストンが上昇するための f_s に対するこの条件を，不等式で表せ。答は f_s，f，k，M，g のうちの必要なものを用いて表せ。

問 7　上昇を始めたピストンが位置 x にあるとき，ピストンが受ける力を求めよ。ただし，鉛直下向きを正とし，f_s，f，k，M，g，x のうちの必要なものを用いて表せ。

問 8　上昇するピストンはやがて減速し，時刻 $t=t_2$ でその速さが再び 0 になった。上昇を開始してからの経過時間 t_2-t_1 と，このときのピストンの位置を求めよ。答は f_s，f，k，M，g のうちの必要なものを用いて表せ。

問 9　いま，$f = 0.2 \times Mg$ であったとする。このとき，時刻 $t = 0$ から $t = t_2$ までの間のピストンの位置を，x を縦軸に，t を横軸にとって，解答欄のグラフに描け。なお，グラフの縦軸には，位置 x_1 が記入されている。



◇M5(428—48)

〔2〕 図のような，気球とゴンドラからなる熱気球を考える。気球部分は，熱を通さず，伸び縮みしない軽い布からできている。気球の下部には弁があり，弁を開けると気球内部は大気と同じ圧力になる。気球には内部の気体をあたためるヒーターがついている。また，布を操作して，気球がいっぱいにふくらんだときの体積を変化させることができる。気球内の気体を除いた熱気球の質量は M である。大気と気球内の気体は同じ種類の理想気体であるとし，その分子量を W，定積モル比熱を C_V とする。大気の絶対温度 T_A は高度によらず一定と仮定する。熱気球にはたらく浮力の大きさは，気球部分が押しのけた大気にはたらく重力の大きさに等しいとする。

気体定数を R として，以下の文中の(1)から(7)および(9)の $\boxed{\quad\quad}$ 内に適切な数式を書き入れよ。(8)と(10)については，理由を簡潔に述べよ。

問 1 気球の弁を開けた状態で，気球内の気体をあたためたところ，気球はいっぱいにふくらんで地表から離れ，空中に浮いて静止していた(**状態 1**)。この位置を原点($z=0$)として，鉛直上向きに z 軸をとる。

状態 1 での気球内の気体の圧力，体積，絶対温度，密度を，それぞれ P_1，V_1，T_1，d_1 とする。このとき，$\dfrac{P_1}{d_1T_1}$ は，W と R を用いて，$\dfrac{P_1}{d_1T_1}=$ $\boxed{(1)}$ と表される。このことから，$\dfrac{P_1}{d_1T_1}$ は気体の圧力や絶対温度に依存せず，理想気体の種類で決まることがわかる。この関係は大気についてもなりたつ。したがって，高度 $z=0$ での大気の密度を ρ_1 とすると，T_1 は，ρ_1，d_1，T_A を用いて，$T_1=$ $\boxed{(2)}$ と表される。

また，熱気球にはたらく力のつりあいから，気球内の気体の密度 d_1 は，ρ_1，M，V_1 を用いて，$d_1=$ $\boxed{(3)}$ と表される。

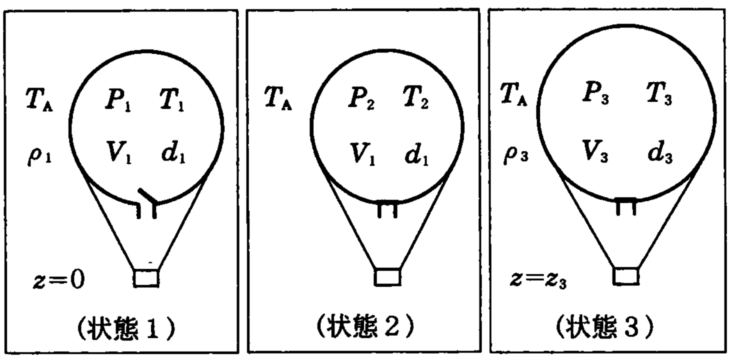
問 2 次に，弁を閉じ，気体の体積を V_1 に保ったまま，ヒーターで内部の気体に熱量 Q ($Q>0$)を与えたところ，気球内の気体の圧力，絶対温度は，それぞれ P_2，T_2 となった(**状態 2**)。このとき，T_2 を C_V，Q，P_1，V_1，T_1，R を用いて表すと，$T_2=$ $\boxed{(4)}$ となる。また，P_2 は，C_V，Q，P_1，V_1，R を用いて，$P_2=$ $\boxed{(5)}$ と表される。

問 3　次に，弁を閉じたまま，気球の体積を V_1 から V_3 にゆっくりと増加させたところ，気球内の気体の圧力，絶対温度，密度は，それぞれ P_3，T_3，d_3 となり，気球は高度 z_3 で静止した(**状態 3**)。この高度における大気の密度を ρ_3 とすると，ρ_1，V_1，V_3 を用いて，$\rho_3 =$ $\boxed{\quad (6) \quad}$ と表される。

ところで，高度 z における大気の密度が $\rho_1 \times 10^{-az}$ (a は正の定数)で与えられるとすると，高度 z_3 は，a，V_1，V_3 を用いて表すことができ，$z_3 =$ $\boxed{\quad (7) \quad}$ となる。

問 4　状態 2 から状態 3 への過程では，気球内の気体は断熱変化をする。断熱変化の途中の気体の圧力 P と体積 V の間には，定数 γ を用いて，$PV^{\gamma} =$ 一定，という関係がなりたつ。以下，状態 2 から状態 3 への断熱変化の考察から，$\gamma > 1$ であることを導こう。

この過程では，気球の体積が増加するにつれて，気球内の気体の内部エネルギーは減少する。その理由を $\boxed{\quad (8) \quad}$ に簡潔に述べよ。ただし，熱力学第一法則を用いて解答すること。次に，断熱変化の途中の気体の絶対温度 T を V，V_1，T_2，γ を用いて表すと，$T =$ $\boxed{\quad (9) \quad}$ となる。以上の結果と，理想気体の内部エネルギーは絶対温度に比例するという性質を用いて，$\gamma > 1$ である理由を $\boxed{\quad (10) \quad}$ に簡潔に述べよ。ただし，この過程で気球内の気体の絶対温度がどのように変化するかを示し，解答すること。



〔3〕 単位長さあたりの巻き数が n の無限に長いソレノイドに強さ I の電流を流すと，ソレノイドの内側には，磁束密度 $B = \mu_0 nI$ の一様な磁場(磁界)がソレノイドの軸に沿った方向に生じ，ソレノイドの外側には磁場は生じない。ここで，μ_0 は真空の透磁率である。以下の文中の $\boxed{}$ に適切な数式を書き入れよ。ただし，(9)については，正しい語句の記号を○で囲め。

図のように，2つの無限に長いソレノイドが，それらの軸が一致するように置かれている。内側のソレノイドS1の半径は R_1，外側のソレノイドS2の半径は R_2 であり，ソレノイドの単位長さあたりの巻き数はどちらも n である。S1に強さ I_1 の電流を，S2 に強さ I_2 の電流を，図に示した向きに流す。図のように座標軸をとると，磁束密度の z 成分は，符号を含めて，S2の外側では $\boxed{(1)}$，S1とS2の間では $\boxed{(2)}$，S1の内側では $\boxed{(3)}$ となる。

この状態で，図のように，$z = 0$ 面内のS1とS2の間で，ソレノイドの軸を中心とした半径 R_0 の円周上を，電子が等速円運動をしている。電子の電荷を $-e$，質量を m とする。電子が $x = R_0$，$y = 0$，$z = 0$ の位置に来たときの，電子の運動量の x，y，z 成分は，それぞれ，$p_x = \boxed{(4)}$，$p_y = \boxed{(5)}$，$p_z = 0$ である。また，この電子の円軌道で囲まれた領域を z 軸の正の向きに貫く，ソレノイドによる磁束 Φ は，$\Phi = \boxed{(6)}$ で与えられる。以下では，$z = 0$ 面内の電子の円運動によって生じる磁束は考えなくてよい。

次に，時間 Δt をかけて，S1の電流値を $I_1 - \Delta I_1$ ($\Delta I_1 > 0$) にまで一定の割合で減少させ，また同時に，S2の電流値を $I_2 + \Delta I_2$ ($\Delta I_2 > 0$) にまで一定の割合で増加させた。その後，S1とS2の電流値を，それぞれ $I_1 - \Delta I_1$ および $I_2 + \Delta I_2$ に保った。電流が変化している間，電子の運動量は電磁誘導による力を受けて変化し，電子にはたらく遠心力は変化した。他方，電子には磁場によるローレンツ力もはたらいている。ここで，ΔI_1 と ΔI_2 を調整したところ，電流を変化させている間も変化させた後も，電子は電流を変化させる前と同じ円軌道上を運動した。このときの，ΔI_1 と ΔI_2 の間の関係を求めよう。ただし，ソレノイドの自己誘導やソレノイド間の相互誘導の影響は考えなくてよい。

時間Δtの間の電流の変化にともなう磁束Φの変化$\Delta\Phi$をΔI_1およびΔI_2を含んだ式で表すと，$\Delta\Phi =$ $\boxed{(7)}$ となる。磁束が変化している間に生じる，電子の軌道一周にわたる誘導起電力は，$-\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$で与えられる。この起電力に対応して，電子の軌道に沿って一定の強さの電場(電界)が生じると考えられる。その電場の強さは，$\Delta\Phi$を含んだ式で， $\boxed{(8)}$ と表され，電場の向きは，電子の運動方向と $\boxed{(9)\ \text{(a)同じ向き}\quad\text{(b)反対向き}}$ である。この電場による力を受け，電子の運動量の大きさは，時間Δtの間に，pからp'に変化した。運動量の大きさの変化$\Delta p = p' - p$は，$\Delta\Phi$を含んだ式で，$\Delta p =$ $\boxed{(10)}$ と表される。ソレノイドの電流の変化にともなって，電子の位置での磁束密度のz成分B_zはB_z'に変化したが，電子が電流の変化前と同じ円軌道上を運動するためには，電流の変化後の磁束密度B_z'と電子の運動量の大きさp'の間に$p' =$ $\boxed{(11)}$ という関係式がなりたてばよい。ところで，B_z'をμ_0，n，I_2，ΔI_2を用いて表すと，$B_z' =$ $\boxed{(12)}$ である。以上より，ΔI_1とΔI_2の間には，$\dfrac{\Delta I_2}{\Delta I_1} =$ $\boxed{(13)}$ という関係が必要なことがわかる。なお，(13)では，計算の過程も示すこと。