B

令和7年度

前期日程

数学問題

〔注　意〕

1．問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない．

2．**受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること．**

3．問題本文は，3 ページ，5 ページ，7 ページ，9 ページにある．脱落している場合は直ちに申し出ること．

4．解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている．解答用紙をミシン目に従って切り離すこと．

5．解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること．**指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする．**

6．問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

7．解答用紙は持ち帰ってはいけない．

8．問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること．

（下 書 き 用 紙）

（下 書 き 用 紙）

1 平面上の三角形 OAB を考える．$\angle$AOB は鋭角，OA $= 3$，OB $= t$ とする．また，点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし，OC $= 1$ とする．線分 AB を $2:1$ に内分する点を P，点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を t を用いて表せ．

(2) 線分 OR の長さを t を用いて表せ．

(3) 線分 OB の中点を M とする．点 R が線分 MB 上にあるとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

2 p と m を実数とし，関数 $f(x) = x^3 + 3px^2 + 3mx$ は $x = \alpha$ で極大値をとり，$x = \beta$ で極小値をとるとする．

(1) $f(\alpha) - f(\beta)$ を p と m を用いて表せ．

(2) p と m が $f(\alpha) - f(\beta) = 4$ を満たしながら動くとき，曲線 $y = f(x)$ の変曲点の軌跡を求めよ．

（配点率 20 %）

3 座標空間に 3 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(0,1,1)$，$\mathrm{P}(x,y,0)$ がある．$\angle\mathrm{OAP} = 30^\circ$ かつ $y \geqq 0$ を満たすように点 P が動くとき，$(x+1)(y+1)$ の最大値と最小値を求めよ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

4 次の問いに答えよ.

(1) $t > 0$ のとき

$$-\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2}\,dx < \frac{1}{t}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0$ を示せ.

(3) $f(x) = \sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ とおく.

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx$$

を示せ.

(配点率 20 %)

（下 書 き 用 紙）

5 投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある．A，B，C の 3 文字を BAC のように 1 個ずつすべて並べて得られる文字列に対して，コインを投げて次の操作を行う．

- 表が出たら文字列の左から 1 文字目と 2 文字目を入れかえる．
- 裏が出たら文字列の左から 2 文字目と 3 文字目を入れかえる．

例えば，文字列が BAC であるときに，2 回続けてコインを投げて表，裏の順に出たとすると，文字列は BAC から ABC を経て ACB となる．

最初の文字列は ABC であるとする．コインを n 回続けて投げたあとの文字列が ABC である確率を p_n とし，BCA である確率を q_n とする．

(1) k を正の整数とするとき，$p_{2k} - q_{2k}$ を求めよ．

(2) n を正の整数とするとき，p_n を求めよ．

（配点率 20 %）