B

平成21年度

前期日程

数学問題

〔注　意〕

1. 問題冊子及び解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない.
2. **受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に右詰めで正確に記入すること.**
3. 問題本文は，3 ページと，5 ページと，7 ページと，9 ページにある．脱落している場合は直ちに申し出ること.
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている．解答用紙をミシン目に従って切り離すこと.
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，解答用紙の指定されたところに記入すること．**指定された場所以外に記入してはいけない.**
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい.
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない.
8. 問題冊子及び表紙・白紙は持ち帰ること.

(下 書 き 用 紙)

(下 書 き 用 紙)

1　放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}_1(a_1, a_1^2), \mathrm{A}_2(a_2, a_2^2), \mathrm{A}_3(a_3, a_3^2), \ldots$ を，A_{k+2} $(k \geqq 1)$ における C の接線が直線 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ に平行であるようにとる．ただし，$a_1 < a_2$ とする．三角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}$ の面積を T_k とし，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と C で囲まれた部分の面積を S とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k$ を S を用いて表せ．

（配点率 20 %）

2　行列 $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする．点 $\mathrm{P}(16\sqrt{3}, 16)$ をとり，$\mathrm{P}_1 = f(\mathrm{P})$, $\mathrm{P}_{n+1} = f(\mathrm{P}_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ とする．正の整数 k に対して，次の条件をみたす領域を D_k とする．

$$x < 0, \quad y < 0, \quad \sqrt{3}x + y \leqq -2^{-k}$$

このとき D_k に含まれる P_n の個数を k で表せ．

（配点率 20 %）

(下書き用紙)

3 α を 2 次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解とするとき，$(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=1$ をみたす整数の組 (a,b,c) をすべて求めよ．ただし，必要ならば $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明せずに用いてよい．

（配点率 20 %）

(下 書 き 用 紙)

4　平面上の三角形 OAB を考え, 辺 AB の中点を M とする.

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|},\ \vec{b} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$$

とおき，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} > 0$ であるようにとる．直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ.

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$ であることを示せ.

（配点率 20 %）

(下 書 き 用 紙)

5 $n=1,2,3,\ldots$ に対して，$y=\log(nx)$ と $\left(x-\dfrac{1}{n}\right)^2+y^2=1$ の交点のうち第 1 象限にある点を (p_n, q_n) とする．

(1) 不等式 $1-q_n^2 \leqq \dfrac{(e-1)^2}{n^2}$ を示すことにより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n=1$ を証明せよ．ただし，e は自然対数の底である．

(2) $S_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}\log(nx)\,dx$ を p_n で表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ．

（配点率 20 %）