B

平成20年度

# 前期日程

# 数学問題

〔注　意〕

1．問題冊子及び解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない．

2．**受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること．**

3．問題本文は，3 ページと，5 ページと，7 ページと，9 ページにある．脱落している場合は直ちに申し出ること．

4．解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている．解答用紙をミシン目に従って切り離すこと．

5．解答（途中の計算，推論等を含む）は，解答用紙の指定されたところに記入すること．**指定された場所以外に記入してはいけない．**

6．問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

7．解答用紙は持ち帰ってはいけない．

8．問題冊子及び表紙・白紙は持ち帰ること．

**1** 2 次の正方行列 $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots\cdots$ を

$$A_0 = O, \qquad A_n = B + A_{n-1}C \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定める．ただし，$O$ は 2 次の零行列，$B$ と $C$ は 2 次の正方行列とする．

(1) $A_n(E-C)$ を $B$ と $C$ を用いて表せ．ここで $E$ は 2 次の単位行列とする．

(2) $B$ と $C$ を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，$A_{3n}$ を求めよ．

（配点率 20 %）

**2** 点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle\mathrm{XOY} = 60^\circ$ とする．2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に，また，2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして，線分 AC の中点を M，線分 BD の中点を N とする．線分 AB の長さを $s$，線分 CD の長さを $t$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線分 MN の長さを $s$ と $t$ を用いて表せ．

(2) 点 A, B と C, D が，$s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ．

（配点率 20 %）

**3**　$N$ を 2 以上の自然数とする.

(1) 関数 $f(x) = (N - x)\log x$ を $1 \leqq x \leqq N$ の範囲で考える. このとき, 曲線 $y = f(x)$ は上に凸であり, 関数 $f(x)$ は極大値を 1 つだけとる. このことを示せ.

(2) 自然数の列 $a_1$, $a_2$, $\cdots\cdots$, $a_N$ を

$$a_n = n^{N-n} \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots, N)$$

で定める. $a_1$, $a_2$, $\cdots\cdots$, $a_N$ のうちで最大の値を $M$ とし, $M = a_n$ となる $n$ の個数を $k$ とする. このとき $k \leqq 2$ であることを示せ.

(3) (2) で $k = 2$ となるのは, $N$ が 2 のときだけであることを示せ.

（配点率 20 %）

$\boxed{4}$ $t$ を負の実数とし，$xy$ 平面上で曲線 $y=2^{2x+2t}$ と曲線 $y=2^{x+3t}$ および $y$ 軸で囲まれる部分を $D$ とする．

(1) $D$ を $x$ 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ を求めよ．

(2) $t$ が負の実数の範囲を動くとき，$V(t)$ の最大値を求めよ．

（配点率 20 %）

**5** 1枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い，表が 500 回続けて出たときに終わるものとする．$n$ を 500 以上の自然数とするとき，この反復試行が $n$ 回目で終わる確率を $p(n)$ とする．

(1) $501 \leqq n \leqq 1000$ のとき，$p(n)$ は $n$ に関係なく一定の値になることを示し，またその値を求めよ．

(2) $p(1002) - p(1001)$ の値を求めよ．

(3) $1002 \leqq n \leqq 1500$ のとき，$p(n+1) - p(n)$ の値を求めよ．

（配点率 20 %）