B

平成19年度

# 前期日程

# 数学問題

〔注　意〕

1．問題冊子及び解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない．

2．**受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること．**

3．問題本文は，3 ページと，5 ページと，7 ページと，9 ページにある．脱落している場合は直ちに申し出ること．

4．解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている．解答用紙をミシン目に従って切り離すこと．

5．解答（途中の計算，推論等を含む）は，解答用紙の指定されたところに記入すること．**指定された場所以外に記入してはいけない．**

6．問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

7．解答用紙は持ち帰ってはいけない．

8．問題冊子及び表紙・白紙は持ち帰ること．

(下 書 き 用 紙)

(下 書 き 用 紙)

**1** 　$n$ を自然数とする．関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフを $C$ とし，$C$ 上の 2 点 $(n,\sqrt{n})$ と $(n+1,\sqrt{n+1})$ を通る直線を $l$ とする．$C$ と $l$ で囲まれた部分を $x$ 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V$ とする．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^a V=b$ を満たす正の数 $a$, $b$ を求めよ．

（配点率 20 %）

**2** 　次の問いに答えよ．

(1) $x$ が正の数のとき $|\log x| \leqq \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ を示せ．

(2) $p$, $q$, $r$ が $p+q+r=1$ を満たす正の数のとき

$$p^2+q^2+r^2 \geqq \frac{1}{3}$$

を示せ．

(3) $a$, $b$, $c$ が相異なる正の数で，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$ を満たすとき

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}+\frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b}+\frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c} \leqq \frac{1}{3}$$

を示せ．

（配点率 20 %）

(下 書 き 用 紙)

$\boxed{3}$　$xy$ 平面において，原点 O を通る半径 $r$ $(r>0)$ の円を $C$ とし，その中心を A とする．O を除く $C$ 上の点 P に対し，次の 2 つの条件 (a)，(b) で定まる点 Q を考える．

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ．

(b) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$.

以下の問いに答えよ．

(1) 点 P が O を除く $C$ 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ．

(2) (1) の直線を $l$ とする．$l$ が $C$ と 2 点で交わるとき，$r$ のとりうる値の範囲を求めよ．

（配点率 20 %）

(下 書 き 用 紙)

$\boxed{4}$ $f(x) = x^3 - x$ とし，$t$ を実数とする．$xy$ 平面において，曲線 $y = f(x)$ を $C_1$ とし，直線 $x = t$ に関して $C_1$ と対称な曲線

$$y = f(2t - x)$$

を $C_2$ とする．

(1) $C_1$ と $C_2$ が 3 点で交わるとき，$t$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $t$ が (1) で求めた範囲を動くとき，$C_1$ と $C_2$ で囲まれた部分の面積 $S$ の最大値を求めよ．

（配点率 20 %）

(下 書 き 用 紙)

$\boxed{5}$ $n$ を 2 以上の自然数とする．4 個の行列

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$
$$C=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

を重複を許して $n$ 個並べたものを

$$M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_n$$

とする．

(1) 積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できる場合は何通りあるか．その数を $n$ の式で表せ．

(2) 積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できて，その積が零行列でない $2\times 3$ 行列となる場合は何通りあるか．その数を $n$ の式で表せ．

(3) 積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できて，その積が零行列とならない場合は何通りあるか．その数を $n$ の式で表せ．

（配点率 20 %）