B

平成18年度

前期日程

数学問題

〔注 意〕

1. 問題冊子及び解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. **受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。**
3. 問題本文は，3ページと，5ページと，7ページと，9ページにある。脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙1枚と解答用紙5枚と白紙2枚が一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，解答用紙の指定されたところに記入すること。**指定された場所以外に記入してはいけない。**
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子及び表紙・白紙は持ち帰ること。

◇M4(735—37)

（下 書 き 用 紙）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{1}$ 曲線 $y=x\sin^2 x$ と直線 $y=x$ の共有点のうち，x 座標が正のものを，x 座標が小さいものから順に A_1，A_2，A_3，…とし，第 n 番目の点を A_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 A_n の x 座標を求めよ．また，点 A_n において，曲線 $y=x\sin^2 x$ と直線 $y=x$ は接していることを示せ．

(2) 線分 A_nA_{n+1} と曲線 $y=x\sin^2 x$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{2}$ 直線 $y=x$ を l で，直線 $y=-x$ を l' で表す．直線 l，l' のどちらの上にもない点 $A(a,b)$ をとる．点 A を通る直線 m が 2 直線 l，l' とそれぞれ点 P，P′ で交わるとする．点 Q を

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ}$$

を満たすようにとる．ただし，O は xy 平面の原点である．直線 m を変化させるとき，点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

3 x, y を変数とする.

(1) n を自然数とする．次の等式が成り立つように定数 a, b を定めよ.

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)}$$

$$=\frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)}+\frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

(2) すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$$

(配点率 20 %)

（下 書 き 用 紙）

4 三角形OABの辺OA，OB上に，それぞれ点P，Qをとり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = b\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (0 < a < 1,\ 0 < b < 1)$$

とする．三角形OABの重心Gが三角形OPQの内部に含まれるための必要十分条件をa，bを用いて表せ．また，その条件を満たす点(a, b)はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ．ただし，三角形OPQの辺上の点は，三角形OPQの内部に含まれないと考える．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

5 一辺の長さが1の正方形ABCDの辺BC, CD, DA, AB上に, それぞれ点P, Q, R, Sを

$$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{QPC},\ \ \angle \mathrm{PQC} = \angle \mathrm{RQD},\ \ \angle \mathrm{QRD} = \angle \mathrm{SRA}$$

となるようにとる. ただし, 点P, Q, R, Sは, どれも正方形ABCDの頂点とは一致しないものとする.

以下の問いに答えよ.

(1) 線分BPの長さtのとりうる値の範囲を求めよ.

(2) 直線APと直線RSの交点をTとする. 四角形PQRTの面積を線分BPの長さtについての関数と考えて$f(t)$で表す. $f(t)$の最大値を求めよ.

(配点率 20 %)