

- 1 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$ とおく. 直線 $y = mx$ が曲線 $y = f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ.

(配点率 20 %)

- 2 正の整数 n に対して

$$S(n) = \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}, \quad T(n) = \sum_{q=1}^n \frac{1}{n+q}$$

とおく. 等式 $S(n) = T(n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて示せ.

(配点率 20 %)

3 空間内の4点 A, B, C, D が

$$AB = 1, AC = 2, AD = 3$$

$$\angle BAC = \angle CAD = 60^\circ, \angle DAB = 90^\circ$$

をみたしている. この4点から等距離にある点を E とする. 線分 AE の長さを求めよ.

(配点率 20 %)

4 θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする. 時刻 t における座標が

$$\begin{cases} x = t \cos \theta \\ y = 1 - t^2 + t \sin \theta \end{cases}$$

で与えられるような動点 $P(x, y)$ を考える. t が実数全体を動くとき, 点 P が描く曲線を C とする. C が x 軸の $x \geq 0$ の部分と交わる点を Q とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, Q の x 座標を求めよ.
- (2) θ が変化すると曲線 C も変化する. θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲を変化するとき, C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ.
- (3) θ が変化すると点 Q も変化する. Q の x 座標が最大となるような θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) について $\tan \theta$ の値を求めよ.

(配点率 20 %)

5 n を正の整数, a を正の実数とする. 曲線 $y = x^n$ と曲線 $y = a \log x$ が, 点 P で共通の接線をもつとする. ただし, 対数は自然対数である. 点 P の x 座標を t とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) a, t をそれぞれ n を用いて表せ.

(2) 曲線 $y = x^n$ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_1 とする. また, 曲線 $y = a \log x$ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする. このとき, $\frac{S_2}{S_1}$ を n を用いて表せ.

(3) $x \geq 0$ のとき, 不等式

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$$

が成り立つことを, 次の(a), (b)に分けて示せ. ただし, e は自然対数の底とする.

(a) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ.

(b) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1$ が成り立つことを示せ.

(4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ.

(配点率 20 %)