

平成 16 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

〔注 意〕

1. 問題冊子及び解答用冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は、解答用紙の受験番号欄(計 10 か所)にはっきり記入すること。
3. 問題本文は、3 ページと、5 ページと、7 ページと、9 ページにある。脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚と一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答(途中の計算、推論等を含む)は、解答用紙の指定されたところに記入すること。指定された場所以外に記入してはいけない。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子及び表紙・白紙は持ち帰ること。

1 n を自然数とする.

(1) n 個の複素数 z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) が

$$0 \leq \arg z_k \leq \frac{\pi}{2}$$

をみたすならば, 不等式

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2$$

が成り立つことを示せ.

(2) n 個の実数 θ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) が

$$0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2} \text{ かつ } \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_n = 1$$

をみたすならば, 不等式

$$\sqrt{n-1} \leq \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_n$$

が成り立つことを示せ.

(配点率 20 %)

2 素数 p, q に対して

$$a_n = p^n - 4(-q)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって整数 a_n を定める. ただし, $p > 2q$ とする.

(1) a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば, $m = 3$ であることを示せ.

(2) a_n がすべて 3 の倍数であるような p, q のうちで積 pq が最小となるものを求めよ.

(配点率 20 %)

- 3 n を 3 以上の自然数とする. 点 O を中心とする半径 1 の円において, 円周を n 等分する点 $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ を時計回りにとる. 各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して, 直線 OP_{i-1}, OP_i とそれぞれ点 P_{i-1}, P_i で接するような放物線を C_i とする. ただし, $P_n = P_0$ とする. 放物線 $C_1, C_2, \dots, C_n$ によって囲まれる部分の面積を S_n とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

(配点率 20 %)

4 実数 a, r に対し数列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

で定める.

- (1) すべての n について $x_n = a$ となるような a を求めよ.
- (2) $x_2 \neq a, x_3 = a$ となるような a の個数を求めよ.
- (3) $0 \leq a \leq 1$ となるすべての a について $0 \leq x_n \leq 1$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) が成り立つような r の範囲を求めよ.

(配点率 20 %)

- 5 座標平面上に直線 $l: x \sin \theta + y \cos \theta = 1$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) がある. 不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x \sin \theta + y \cos \theta \geq 1$ が表す領域を D , 不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x \sin \theta + y \cos \theta \leq 1$ が表す領域を D' とする.

D 内に半径 R の 2 つの円 C_1, C_2 を, C_1 は l と y 軸に接し, C_2 は l と x 軸に接し, さらに C_1 と C_2 が外接するようにとる. また D' 内に半径 r の 2 つの円 C'_1, C'_2 を, C'_1 は l と y 軸に接し, C'_2 は l と x 軸に接し, さらに C'_1 と C'_2 が外接するようにとる.

(1) $\frac{r}{R}$ を θ で表せ.

(2) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $\frac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ.

(配点率 20 %)