1 a を正の実数，$w = a(\cos 5° + i \sin 5°)$ とする．ただし i は虚数単位である．

また，複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1 = w$，$z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ で定める．

(1) z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ．

(2) 複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする．$1 \leqq n \leqq 17$ であるような n について，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ．

（配点率 20％）

2 (1)　$0 < t < 1$ のとき，不等式

$$\frac{\log t}{2} < -\frac{1-t}{1+t}$$

が成り立つことを示せ．

(2)　k を正の定数とする．$a > 0$ とし，曲線 $C : y = e^{kx}$ 上の2点 $\mathrm{P}(a,\ e^{ka})$，$\mathrm{Q}(-a,\ e^{-ka})$ を考える．このとき P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標は常に正であることを示せ．

(配点率 20%)

3 (1) $f(x)$ を x の整式とし，$\{a_k\}$ は $a_k < a_{k+1}$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$ および $\lim_{k \to \infty} a_k = \infty$ をみたす数列とする．このとき

$$f(a_k)=0,\quad k=1,2,\cdots\cdots$$

ならば $f(x)$ は整式として 0 であることを示せ．

(2) $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ を x の整式とし

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x)\sin x+f_3(x)\sin 2x$$

はすべての実数 x に対して 0 であるとする．このとき $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ はいずれも整式として 0 であることを示せ．

（配点率 20%）

4 数列$\{a_k\}$が$a_k < a_{k+1}$ $(k = 1, 2, \cdots\cdots)$および

$$a_{k\ell} = a_k + a_\ell,\ \ k = 1, 2, \cdots\cdots,\ \ \ell = 1, 2, \cdots\cdots$$

をみたすとする.

(1) k, ℓを2以上の自然数とする. 自然数nが与えられたとき

$$\ell^{m-1} \leqq k^n < \ell^m$$

をみたす自然数mが存在することを示せ.

(2) k, ℓを2以上の自然数とするとき

$$-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_\ell} - \frac{\log k}{\log \ell} < \frac{1}{n},\ \ n = 1, 2, \cdots\cdots$$

が成り立つことを示せ.

(3) $a_2 = a$とするとき, 数列$\{a_k\}$の一般項を求めよ.

(配点率 20%)

5 (1) 平面上において座標軸に平行な主軸(長軸, 短軸)をもち, x 軸, y 軸の両方に接する楕円を考える. その中心の x 座標を a とする. このような楕円のうち点 A(1, 2)を通るものが存在するための a の範囲を求めよ. ただし円は楕円の特別な場合とみなすものとする.

(2) (1) の楕円がちょうど 2 つ存在するような a に対して, その 2 つの楕円の中心を B, C とする. △ABC の面積を $S(a)$ で表すときこの関数のグラフをかけ.

(配点率 20%)