1 実数を係数とする 3 次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

が異なる 3 つの実数解をもつとする．このとき，$a > 0$，$b > 0$ ならば，少なくとも 2 つの実数解は負であることを示せ．

（配点率 20％）

2 平面上に双曲線 $C : y = \dfrac{1}{x}$ を考える．a，b，c，d を $d < c < 0 < b < a$ をみたす数とし，曲線 C 上の4点 P，Q，R，S をそれぞれ x 座標が a，b，c，d であるような点としたとき，四角形 PQSR が長方形になっているとする．

(1) b，c，d を a を用いて表せ．

(2) 線分 PR と x 軸との交点を T，線分 QS と y 軸との交点を U とするとき，線分 TU と曲線 C が共通点をもたないような a の値の範囲を求めよ．

(3) a が(2)の範囲にあるとき，3線分 PT，TU，UQ と曲線 C で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ．

(4) a が(2)の範囲を動くとき，$S(a)$ の増減を調べその最大値を求めよ．

(配点率 20%)

3 α を $|\alpha| = 1$ であるような複素数とし，複素数の列 $\{z_n\}$ を

$$z_1 = 1,\ z_2 = \frac{\alpha^4}{2},\ \frac{z_n}{z_{n-1}} = \frac{\alpha^2}{4}\frac{\bar{z}_{n-2}}{\bar{z}_{n-1}} \quad (n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots)$$

で定める．ただし，$\bar{z}_n$ は複素数 z_n の共役な複素数とする．

(1) 各 n に対し，z_n を求めよ．

(2) z_n の実部と虚部をそれぞれ x_n，y_n とし，$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおくとき，無限級数の和

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

をそれぞれ求めよ．

(配点率 20%)

4 n を $n \geqq 7$ をみたす整数とし，1つのさいころを投げる試行を n 回くり返す．このとき，$2 \leqq k \leqq n$ をみたす整数 k に対し，「n 回の試行のうち，同じ目が出るどの2つの試行も k 以上離れている」という事象が起こる確率を p_k と表す．ただし，i 番目の試行と j 番目の試行について，この2つの試行は $|i-j|$ だけ離れているということにする．

(1) p_2 の値を求めよ．

(2) $k \geqq 3$ のとき，p_k の値を求めよ．

(3) 「n 回の試行において，同じ目が続くことはなく，しかも同じ目が出る試行の組でちょうど2だけ離れたものが少なくとも1組存在する」という事象が起こる確率を求めよ．

（配点率 20％）

5 平面上に原点Oを中心とする半径1の円 C_1 と点 $\mathrm{P}(0, \sin\alpha)$ を中心とする半径1の円 C_2 がある．ただし $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とする．円 C_2 と x 軸との交点をA，Bとし，A，Bを通り y 軸と平行な直線をそれぞれ ℓ_{A}，ℓ_{B} とする．2直線 ℓ_{A}，ℓ_{B} ではさまれた領域の部分で，円 C_1 の外部で円 C_2 の内部であるものを D_1，円 C_2 の外部で円 C_1 の内部であるものを D_2 とする．いま，D_1，D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積を $V_1(\alpha)$，$V_2(\alpha)$ とする．

(1) $V_1(\alpha)$，$V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ をそれぞれ α を用いて表せ．

(2) α が $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ の最大値を求めよ．

(配点率 20％)