1 2つの複素数 $z = x + yi$，$w = u + vi$（x，y，u，v は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位）に対し，$x \geqq u$ と $y \geqq v$ がともに成り立つとき，$z \gg w$ と書くことにする．

(1) 次の条件

$$z^2 \gg 3 \quad \text{かつ} \quad \bar{z} \gg -\frac{5}{\bar{z}}$$

をみたす複素数 z の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．ただし，$\bar{z}$ は z に共役な複素数とする．

(2) (1)で求めた範囲を z が動くとき，絶対値 $|z - 3i|$ の最小値，および最小値をあたえる z を求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{2}$ $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2$ とおく．曲線 $y = f(x)$ に点（0，a）から接線がただひとつ引けるとし，しかもその接線はただ1点でこの曲線に接するとする．このときの a の値を求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{3}$ 半径1の円周上に，$4n$ 個の点 P_0，P_1，…，P_{4n-1} が，反時計回りに等間隔に並んでいるとする．ただし，n は自然数である．

(1) 線分 P_0P_k の長さが $\sqrt{2}$ 以上となる k の範囲を求めよ．

(2) 点 P_0，P_1，…，P_{4n-1} のうちの相異なる3点を頂点に持つ三角形のうち，各辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ 以上になるものの個数 $g(n)$ を求めよ．

（配点率 20 %）

4 関数 $f(x) = 4\cos^2 x - 8\cos x + 3$ を考える．n，k を自然数とし

$$g_n(k) = f\left(\frac{\pi}{3n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3n}\right) + \cdots\cdots + f\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

とおく．ただし $n \geqq 2$ とする．

(1) n を固定する．$2 \leqq k \leqq 3n$ の範囲で $g_n(k-1) \geqq g_n(k)$ となる k をすべて求めよ．また，k が $1 \leqq k \leqq 3n$ の範囲を動くとき，$g_n(k)$ を最小とする k をすべて求めよ．

(2) (1) における $g_n(k)$ の最小値を G_n とする．このとき極限値

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n}{n}$$

を求めよ．

（配点率 20 %）

5 数列 $\{a_n\}$ において，各項 a_n が $a_n \geqq 0$ をみたし，かつ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$ が成り立つとする．さらに各 n に対し

$$b_n = (1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)$$

$$c_n = 1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$

とおく．

(1) すべての n に対し不等式 $b_n \geqq c_n$ が成り立つことを，数学的帰納法で示せ．

(2) ある n について $b_{n+1} = c_{n+1}$ が成り立てば，$b_n = c_n$ となることを示せ．

(3) $b_3 = \frac{1}{2}$ となるとき，$c_3 = \frac{1}{2}$ であることを示せ．また $b_3 = \frac{1}{2}$ となる数列 $\{a_n\}$ は全部で何種類あるかを求めよ．

（配点率 20 %）