

1 $a > b > 0$ とする. 円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上の点 $(b, \sqrt{a^2 - b^2})$ における接線と x 軸との交点を P とする. また, 円の外部の点 (b, c) からこの円に2本の接線を引き, 接点を Q, R とする. このとき, 2点 Q, R を通る直線は P を通ることを示せ.

(配点率 20%)

2 xy 平面上の 16 個の点からなる集合

$$\{(x, y) \mid x = 0, 1, 2, 3, \quad y = 0, 1, 2, 3\}$$

を考える. この集合から異なる 3 点を無作為に選ぶ試行において, 次の事象の起こる確率を求めよ.

「選んだ 3 点が三角形の頂点となり, その三角形の面積は $\frac{9}{2}$ である」

(配点率 20%)

3 どのような負でない2つの整数 m と n をもちいても

$$x = 3m + 5n$$

とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ.

(配点率 20%)

4 実数 x に対して、 x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す. n を正の整数とし

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{[\sqrt{2n^2 - k^2}]}{n^2}$$

とおく. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

(配点率 20%)

5 立方体 X と球 Y があって、両者の体積は等しいとする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、円周率は $\pi = 3.14\cdots$ である。

- (1) 立方体 X と球 Y を動かして、立方体 X のなるべく多くの頂点が球 Y の内部に含まれるようにしたい。最大何個の頂点が含まれるようにできるか。
- (2) 立方体 X と球 Y を動かして、立方体 X のなるべく多くの辺が球 Y の内部と共通の点を持つようにしたい。最大何個の辺が共通の点を持つようにできるか。

(配点率 20%)