平成 22 年度入学試験問題

医　学　科　（前　期）

数　　　学

（注　意）

1. 問題冊子及び解答冊子は試験開始の合図があるまで開かないでください。
2. 問題は全部で 3 問題あります。すべての問題に解答してください。
3. 解答冊子は 4 ページあります。解答は解答冊子の所定の欄に記入してください。
   解答冊子の裏面は使用しないでください。
4. 解答冊子の 4 ページ目は使用しないでください。
5. 解答冊子のどのページも切り離さないでください。
6. 下書きは問題冊子の余白部分を使用してください。
7. 監督者の指示に従い，解答冊子の各ページの所定欄に受験番号・氏名をはっきり記入してください。
8. 解答冊子は持ち帰らないでください。
9. 問題冊子は持ち帰ってかまいません。

1 円周率πに関して次の不等式が成立することを証明せよ。ただし，数値$\pi = 3.141592\cdots$を使用して直接比較する解答は0点とする。

$$3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} < \pi < 24 - 12\sqrt{3}$$

2 中心の xyz 座標が$(0, 0, 1)$で半径が1の球 G と点 $P(0, -2, a)$ に関して，点 P を通る直線が球 G と共有点をもつとき，この直線と xy 平面の交点全体が作る図形の外形を表す方程式を求めよ。また，その方程式が表す図形を実数 a に関して分類せよ。

3 微分可能な関数$y=f(x)$が次の方程式を満たすとする。

$$a_n f^{(n)}(x)+a_{n-1}f^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1 f^{(1)}(x)+a_0 f(x)=0 \qquad \text{(A)}$$

ここにnは自然数，a_i $(i=0,1,2,\cdots,n)$は実数の定数で，$a_n \neq 0$である。また，$y^{(k)}=f^{(k)}(x)$は$f(x)$のk次導関数で$y^{(0)}=f^{(0)}(x)=f(x)$とする。(A)のような方程式を第n階微分方程式といい，(A)に対してtのn次方程式

$$a_n t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1 t+a_0=0 \qquad \text{(B)}$$

を(A)の特性方程式という。このとき次の問いに答えよ。

(1) 特性方程式(B)の解が実数rであるとき，関数$y=e^{rx}$が方程式(A)を満たすことを証明せよ。

(2) n次方程式(B)が実数rをk重解(注)にもつとき，次のtに関する方程式はrを$k-1$重解にもつことを証明せよ。ただし，$k=2,3,\cdots$とする。

$$na_n t^{n-1}+(n-1)a_{n-1}t^{n-2}+\cdots+2a_2 t+a_1=0$$

(注) tのm次方程式が適当な多項式$Q(t)$を用いて$(t-r)^k Q(t)=0$となるとき，$t=r$をこの方程式のk重解と定義する。ただし，$k=1,2,\cdots$とする。

(3) 実数の定数rに対してxの関数を$y_i=x^i e^{rx}$ $(i=0,1,2,\cdots)$とする。このとき，$y_j^{(n)}$をx，$y_{j-1}^{(n-1)}$および$y_{j-1}^{(n)}$を用いて表せ。ただし，$j=1,2,3,\cdots$とする。

(4) 実数rがn次方程式(B)のk重解であるとき$y_i=x^i e^{rx}$ $(i=0,1,2,\cdots,k-1)$が微分方程式(A)を満たすことを証明せよ。ただし，kは自然数とする。