令 和 7 年 度

数　　学

問 題 冊 子

[1] 自然数 n の正の約数の総和を $f(n)$ で表すとする．

(1) $f(10)$ と $f(20)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 自然数 k に対して $f(2^k)$ を k の式で表せ．

(3) 自然数 k に対して $N = 2^k \cdot 5$ とするとき，$f(N)$ が N の倍数となるような k は存在するか．存在する場合はそのような k と N をすべて求めよ．

(4) 自然数 k に対して $N = 2^k \cdot 21$ とするとき，$f(N)$ が N の倍数となるような k は存在するか．存在する場合はそのような k と N をすべて求めよ．

[2] 二次方程式 $(a+1)x^2 - 4(a+2)x + 2(a+1) = 0$ を考える．ただし，a は実数で絶対値が 1 より小さいとする．

(1) この方程式は異なる 2 つの実数解をもつことを示せ．

(2) この方程式の解を α, β とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{a \to -1+0} (\alpha + \beta)$ を求めよ．

(3) $\alpha < \beta$ としたとき，α と β がとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ．

[3] 二次方程式 $x^2 - x + 1 = 0$ の解を α, β とし，数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \alpha^n + \beta^n$ で定める．

(1) a_1 と a_2 を求めよ．

(2) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n の式で表せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ がとる値をすべて求めよ．

(4) (3) で求めた値の最大値と最小値，およびそれらをとる n を求めよ．

[4] 座標平面の 4 点 $(-1, 1), (-3, 0), (-1, -2), (1, -2)$ をこの順に結んで得られる折れ線を L とする．さらに直線 $y = ax$ と，これに直交する直線で原点を通るものを考える．ただし，a は $-1 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ をみたす実数とする．折れ線 L とこの 2 つの直線で囲まれた部分の面積を S とする．

(1) S を a の式で表せ．

(2) S の最大値と最小値，およびそれらをとる a の値を求めよ．