和歌山県立医科大学

平　成　29　年　度

数　　　学

問　題　冊　子

[1] (1) 実数を係数とする3次の整式 $P(x)$ があり，$P(x)$ は2次式 x^2+ax+b で割り切れるとする．また方程式 $P(x)=0$ は異なる3つの解を持ち，それらの絶対値は等しいとする．このとき，a, b が満たすべき条件を求め，さらに a, b を用いて $P(x)$ を表せ．ただし，a, b は実数であるとし，また $P(x)$ の3次の係数は1とする．

(2) 実数を係数とする4次方程式 $Q(x)=0$ は異なる4つの解を持ち，それらは複素数平面において同一円周上にあるとする．解の2つが $-3, 5+4i$ であるとき，他の2つの解を求めよ．ただし，i は虚数単位である．

[2] Oを原点とする座標空間において，中心が点 $(1,0,0)$ で半径が1の球面を S とし，S が xy 平面と交わってできる円を C とする．点Pはこの C 上を動くものとし，x 軸に関してPと対称な点を P' とする．三角形 OPP' の重心Gを通り z 軸と平行な直線が S と交わる2点のうち，z 座標が正のものをQとする．四面体 $\mathrm{OPP}'\mathrm{Q}$ の体積 V の最大値とそのときのPの座標を求めよ．

[3] a, b, p は自然数であるとする．さらに p は素数であり，ある整数 n で $p=an^2+bn+6$ と表されているとする．また2次方程式 $ax^2+bx+6=0$ は整数の解を少なくとも1つ持ち，かつ絶対値が1より小さな解は持たないとする．このときの自然数の組 (a, b, p) をすべて求めよ．

[4] Oを原点とする座標平面に2点 $\mathrm{P}(-1+\cos t, \sin t)$，$\mathrm{Q}(1+\cos 3t, \sin 3t)$ がある．ただし，$0 \leqq t \leqq \pi$ とする．

(1) 3点O, P, Qが一直線上にあるような t をすべて求めよ．

(2) 3点O, P, Qが一直線上にないとき，$\cos t$ を用いて $\sin\angle\mathrm{POQ}$ を表せ．

(3) (2)と同じ条件の下で，$\sin\angle\mathrm{POQ}$ を t の関数として考えたときのグラフをかけ．

(4) 3点O, P, Qが一直線上になく，さらに線分OPと線分PQの長さが等しくなるときの三角形OPQの面積を求めよ．ただし，そのときの t は求めなくてもよい．