和歌山県立医科大学

平 成 27 年 度

# 数　　　学

# 問 題 冊 子

[1] $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とし，$a$, $b$, $c$ は実数とする．$y = f(x)$ によって表される曲線を $C$ とおく．$C$ は $x$ 軸と点 $(-1, 0)$ でのみ交わるとする．さらに，$C$ の接線で傾きが $-1$ のものがただ一つ存在するとし，それを $\ell$ とする．

(1) $f'(-1) > 0$ となることを示せ．

(2) $a$ の値の範囲を求めよ．

(3) $C$ と $\ell$ の接点の $x$ 座標が $1$ であるとき，$C$ と $\ell$ と $x$ 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

[2] (1) $a$ は実数で $0 \leqq a \leqq \pi$ とする．

$$0 \leqq \theta \leqq \pi, \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\theta = 0$$

を満たす $\theta$ を求めよ．

(2) 連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \pi, \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{4}\right) + \cos y \geqq 0$$

によって表される $xy$ 平面上の領域を図示せよ．

[3] $xyz$ 空間の原点を O とし，点 $(0, 0, 1)$ と点 $(\sqrt{3}, 1, 1)$ を通る直線を $\ell$ とする．点 P は，時刻 $t = 0$ のとき $(-4, 0, 0)$ にあって，$x$ 軸上を正の向きに速さ $1$ で動いている．点 Q は，$t = 0$ のとき $(0, 0, 1)$ にあって，直線 $\ell$ 上を $x$ 座標が増えるように速さ $2$ で動いている．

(1) 点 P, Q の座標を $t$ の式で表せ．

(2) 三角形 OPQ の面積 $S$ を $t$ の式で表せ．

(3) $-0.33 \leqq t \leqq 2.6$ のときの $S$ の最大値と最小値，およびそれらをとる $t$ の値を求めよ．

[4] あるバクテリアをある条件の下で培養した場合，生存している 1 個が，1時間後には1回分裂して2個ともに生存しているか，あるいは死滅しているかであり，2 個とも生存している確率が $p$，死滅している確率が $1-p$ であるという．このバクテリアがこの条件の下で最初1個生存していたとき，$n$ 時間後に1個以上生存している確率を $P_n$ とおく．ただし，$n$ は自然数とする．

(1) $P_2$, $P_3$ をそれぞれ $p$ の式で表せ．

(2) $P_{n+1}$ を $p$ と $P_n$ の式で表せ．

(3) $p=\dfrac{1}{3}$ のときの $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n$ を求めよ．

(4) $a$ を 2 より大きな実数とする．$p=\dfrac{a-1}{a}$，$Q_n=P_n-\dfrac{a-2}{a-1}$ としたとき，$0<Q_{n+1}<Q_n$ であることを示せ．

(5) $p$ が (4) と同じときの $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n$ を求めよ．