

和歌山県立医科大学

平成 25 年 度

数 学

問 題 冊 子

[1] 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & (0 \leq x < \frac{\pi}{2}) \\ 2x + \sin x & (x \geq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

と定め、関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(2x) - 2f(x) \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

と定める.

- (1) 関数 $g(x)$ の最大値と最小値, およびそれらをとる x の値を求めよ.
- (2) 曲線 $C: y = g(x)$ の概形を描け. ただし, 変曲点に留意しなくてよい.
- (3) 区間 $[0, 2\pi]$ で, 曲線 C と x 軸の間にある部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

[2] 実数 x, y に対して, $x \vee y$ は x と y の小さくない方を表し, $x \wedge y$ は x と y の大きくない方を表すとする.

- (1) $(1 \vee 2) \wedge (3 \vee 4)$ および $(1 \wedge 3) \vee (2 \wedge 4)$ を求めよ.
- (2) 実数 a, b, c, d に対して,

$$(a \vee b) \wedge (c \vee d) \geq (a \wedge c) \vee (b \wedge d)$$

が成り立つこと示せ.

- (3) 実数 a, b, c, d に対して,

$$(a \vee b) \wedge (c \vee d) = (a \wedge c) \vee (b \wedge d)$$

が成り立つか. 成り立つ場合は証明し, 成り立たない場合は反例をあげよ.

[3] 隣り合う辺の長さが a, b の長方形がある. その各辺の中点を順に結んで四角形をつくる. さらにその四角形の各辺の中点を順に結んで四角形をつくる. このような操作を無限に続ける.

- (1) 最初の長方形も含めたこれらの四角形の周の長さの総和 S を求めよ.
- (2) 関係 $a + b = 1$ を満たしながら a, b が動くときの S の最小値を求めよ.

[4] 2 次の正方行列について, 以下の問いに答えよ. ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

- (1) 行列 $S = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ が, $TS = E$ を満たすならば, $ST = E$ となることを示せ.

- (2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (ただし, $a \neq 0$) に対して, 行列 B は $BA = E$ を満たすとする.

さらに, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}$ を考えて, $M = PA, N = BQ$ とおく.

- (i) $NM = E$ を示せ.
- (ii) $MN = E$ を示し, $AB = E$ となることを示せ.