理科系　　令和７年度　入学試験問題・答案紙・数学公式集

数　　　学

（情―自然，コン・理・医・工・農）

２月26日(水) 10：00―12：30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて12枚(そのうち問題紙１枚，答案紙４枚，数学公式集３枚)である。
3. 落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所などがあったら，ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し，すべての答案紙の所定の２箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し，裏に記入してはいけない。
6. この冊子の答案紙以外の余白は，草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に，文科系，理科系の区別なく作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了後退室の許可があるまでは，退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。

問 題 紙

1 以下の問に答えよ。

(1) 実数xを変数とする関数$f(x)$が導関数$f'(x)$および第2次導関数$f''(x)$をもち，すべてのxに対し$f''(x)>0$をみたすとする。さらに以下の極限値a，b $(a<b)$が存在すると仮定する。

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=a,\quad \lim_{x\to\infty}f'(x)=b$$

このとき，$a<c<b$をみたす任意の実数cに対し，関数$g(x)=cx-f(x)$の値を最大にする$x=x_0$がただひとつ存在することを示せ。

(2) 実数xを変数とする関数

$$f(x)=\log\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$$

はすべてのxに対し$f''(x)>0$をみたすことを示せ。また，このfに対し小問(1)の極限値a，bを求めよ。

(3) 小問(2)の関数fおよび極限値a，bを考える。$a<c<b$をみたす任意の実数cに対し小問(1)のx_0および$g(x_0)$をcを用いて表せ。

2 整数a，b，cに対し次の条件を考える。

$$(*)\quad a\geqq b\geqq 0 \text{ かつ } a^2-b^2=c$$

以下の問に答えよ。

(1) $c=24$，25，26それぞれの場合に条件$(*)$をみたす整数の組$(a,\ b)$をすべて求めよ。

(2) pは3以上の素数，nは正の整数，$c=4p^{2n}$とする。このとき，条件$(*)$をみたす整数の組$(a,\ b)$をすべて求めよ。

3 以下の問に答えよ。

(1) 実数r，αは$0<r\leqq 1$，$0\leqq\alpha<\pi$をみたすとする。xy平面内で，点$(1,\ 0)$を中心にもつ半径rの円周およびその内部をCとする。Cを原点$(0,\ 0)$を中心に反時計まわりに角度αだけ回転させるとき，Cが通過する領域の面積を求めよ。

(2) 実数R，αは$0<R\leqq 1$，$0\leqq\alpha<\pi$をみたすとする。xyz空間内で，点$(1,\ 0,\ 0)$を中心にもつ半径Rの球面およびその内部をBとする。Bをz軸のまわりに角度αだけ回転させるとき，Bが通過する領域の体積を求めよ。ただし，回転の向きは回転後のBの中心が$(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)$になるように選ぶものとする。

4 コイン①, …, ⑥が下図のようにマス目の中に置かれている。

①	②	③
④	⑤	⑥

これらのコインから無作為にひとつを選び，選んだコインはそのままにし，そのコインのあるマス目と辺を共有して隣接するマス目のコインを裏返す操作を考える。例えば，①を選べば，②，④を裏返し，②を選べば，①，③，⑤を裏返す。最初はすべてのコインが表向きに置かれていたとする。正の整数nに対し，n回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きである確率をp_nとするとき，以下の問に答えよ。

(1) p_2を求めよ。

(2) コイン①, …, ⑥をグループA，Bに分けることによって，n回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるための必要十分条件を次の形に表すことができる。

　　n回目の操作終了時点までにAに属する各コインはそれぞれ奇数回選ばれ，Bに属する各コインはそれぞれ偶数回選ばれる。

どのようにグループ分けすればよいかを答えよ。

(3) p_4を求めよ。

●　　●

数　学　公　式　集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不　等　式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$，（$a$，$b$，$c$ は正または0）

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三　角　形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図　形　と　式）

6. 数直線上の2点 x_1，x_2 を $m:n$ に内分する点，および外分する点：$\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$

7. 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：
$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベ　ク　ト　ル）

10. 2つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

（複　素　数）

11. 極形式表示：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$(r=|z|,\ \theta=\arg z)$

12. $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$に対し，$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

13. ド・モアブルの公式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$に対し，$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

14. $x^2+px+q=0$の解がα，βのとき，$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$

15. $x^3+px^2+qx+r=0$の解がα，β，γのとき，$\alpha+\beta+\gamma=-p$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$，$\alpha\beta\gamma=-r$

（対　数）

16. $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三　角　関　数）

17. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

18. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

19. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

20. $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\}$

21. $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

22. $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$，$\left(\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

（数　列）

23. 初項a，公差d，項数nの等差数列の和：$S_n=\dfrac{1}{2}n(a+\ell)=\dfrac{1}{2}n\left\{2a+(n-1)d\right\}$，$(\ell=a+(n-1)d)$

24. 初項a，公比r，項数nの等比数列の和：$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，$(r\neq 1)$

25. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

（極　　　　限）

26. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.71828\cdots\cdots$

27. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

（微　　積　　分）

28. $\left\{f(g(x))\right\}'=f'(g(x))g'(x)$

29. $x=f(y)$のとき $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$

30. $x=x(t)$，$y=y(t)$のとき $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$

31. $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)'=\frac{1}{x}$

32. $x=g(t)$のとき $\int f(g(t))g'(t)dt=\int f(x)dx$

33. $\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$

34. $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

35. $\int\log x\,dx=x\log x-x+C$

36. $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi a^2(a>0)$，$\int_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{4a}\ (a\neq 0)$，$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

37. 回転体の体積：$V=\pi\int_a^b\{f(x)\}^2\,dx$

38. 曲線の長さ：$\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$，$(x=x(t)$，$y=y(t)$，$a=x(\alpha)$，$b=x(\beta))$

（順列・組合せ）

39. ${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$，$(1\leqq r\leqq n-1)$

40. $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$

（確　　　　率）

41. 確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起こる確率：$P_n(r)={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$，$(q=1-p)$

42. 期待値：$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$，ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で，$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ をみたすとする。