C — 1

千葉大学　一般
平成24年度入学者選抜学力検査問題
数　　学

注　意　事　項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので，この冊子を裏返して必ず読み，志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし，この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄には受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
7. この冊子は12頁です。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には，解答用紙は記入の有無にかかわらず机上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により，以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部・学科等		解答する問題番号
数学I 数学A	教育学部	算数科選修， 技術科教育分野	1 2 3 4
数学I 数学II 数学A 数学B	文学部 教育学部 法経学部 園芸学部 先進科学プログラム	行動科学科 情報教育分野 物理化学分野， 人間科学関連分野	3 4 5 6
	教育学部	数学科教育分野	1 2 3 4 5 6
数学I 数学II 数学III 数学A 数学B 数学C	理学部 薬学部 工学部 先進科学プログラム	物理学科，化学科， 生物学科，地球科学科 物理学分野， 電気電子工学分野， ナノサイエンス分野， 画像科学分野， 情報画像学分野	3 5 6 7 9
	医学部		7 8 10 11 12
	理学部	数学・情報数理学科	5 7 8 9 10 11

$\boxed{1}$ a を実数の定数とする。放物線 $y = x^2 - ax + a$ が x 軸の

$$1 \leqq x \leqq 2 \quad \text{または} \quad 3 \leqq x \leqq 4$$

を満たす部分と 2 つの異なる共有点を持つための a の条件を求めよ。

$\boxed{2}$ $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 8$ および $OA = OB = OC = t$ を満たす四面体 OABC がある。

(1) $\angle BAC$ を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径を求めよ。

(3) 4つの頂点 O, A, B, C が同一球面上にあるとき，その球の半径が最小になるような実数 t の値を求めよ。

3 さいころを7回投げ, k 回目 $(1 \leqq k \leqq 7)$ に出る目を X_k とする。

(1) 積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。

(3) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。

$\boxed{4}$ p, q を互いに素な 2 以上の整数，m, n は $m < n$ なる正の整数とする。このとき，分母が p^2q^2 で，分子が p でも q でも割り切れない分数のうち，m よりも大きく n よりも小さいものの総数を求めよ。

$\boxed{5}$ 放物線 $y=x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線を ℓ_a とする。

(1) 直線 ℓ_a が不等式

$$y > -x^2 + 2x - 5$$

の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2) a が (1) で求めた範囲を動くとき，直線 ℓ_a が通らない点 (x, y) 全体の領域 D を図示せよ。

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} (y-x^2)(y+x^2-2x+5) \leqq 0 \\ y(y+5) \leqq 0 \end{cases}$$

の表す領域を E とする。D と E の共通部分の面積を求めよ。

6 1より小さい正の実数 a に対して

$$\text{円 } C(a):\ (x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$$

と定める。その上で, 数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

(i) $n=1$ のときは, 円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに, 円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし, 円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。

(ii) $n \geqq 2$ のときは, 円 $C(a)$ が直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに, 円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ との接点を P_n とし, 円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) a_2 を求めよ。

(3) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{7}$ 横 $2a$, 縦 $2b$ の長方形を長方形の中心のまわりに角 θ だけ回転させる。回転後の長方形ともとの長方形とが重なり合う部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ。ただし, 長方形の中心とはその 2 つの対角線の交点とし, 長方形はそれを含む平面内で回転するものとする。また, 回転角 θ は 0 以上, 長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下に取るものとする。

$\boxed{8}$ すべての項が整数である数列を整数列という。p, q, r, s を実数とし，正の整数 n に対し

$$a_n = p + qn + rn^2, \qquad b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$$

とおく。このとき以下の命題を示せ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が整数列であるための必要十分条件は，p と $q+r+s$ と $2r$ と $6s$ がいずれも整数となることである。

9 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は 第 2 次導関数 $f''(x)$ が連続で, ある $a < b$ に対して、$f'(a) = f'(b) = 0$ を満たしているものとする。このとき

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \left(\frac{a+b}{2} - x \right) f''(x)\, dx$$

が成り立つことを示せ。

(2) 直線道路上における車の走行を考える。ある信号で停止していた車が, 時刻 0 で発進後, 距離 L だけ離れた次の信号に時刻 T で到達し再び停止した。この間にこの車の加速度の絶対値が $\dfrac{4L}{T^2}$ 以上である瞬間があることを示せ。

$\boxed{10}$ さいころを n 回 ($n \geqq 2$) 投げ, k 回目 ($1 \leqq k \leqq n$) に出る目を X_k とする。

(1) 積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2) 積 $X_1X_2\cdots X_n$ が偶数である確率を求めよ。

(3) 積 $X_1X_2\cdots X_n$ が 4 の倍数である確率を求めよ

(4) 積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。

$\boxed{11}$ xy 平面において, 長さ 1 の線分 AB を点 A が原点, 点 B が点 $(1,0)$ に重なるように置く。点 A を y 軸に沿って点 $(0,1)$ まで移動させ, 線分 AB の長さを 1 に保ったまま点 B を x 軸に沿って原点まで移動させる。このとき線分 AB が通る領域を D とする。$0 \leqq x \leqq 1$ となる実数 x に対して, 点 (x,y) が領域 D に含まれるような y の最大値を $f(x)$ とする。

(1) $f(x)$ を x の式で表せ。

(2) 領域 D を x 軸を中心に回転させた立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{\mathbf{12}}$ ℓ, n, d を自然数とする。このとき自然数の積 $(2\ell+1)nd$ は, ある自然数 a と 2 以上の整数 m を用いて

$$(2\ell+1)nd = \sum_{i=1}^{m} \{a + (i-1)d\}$$

と表せることを証明せよ。