C－1

平成22年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注　意　事　項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので，この冊子を裏返して必ず読み，志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし，この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄には受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
7. この冊子は11頁です。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には，解答用紙は記入の有無にかかわらず机上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

◇M4(852—40)

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により，以下に示す問題に解答すること。

<table>
<tr><th>科目</th><th colspan="2">学部・学科等</th><th>解答する問題番号</th></tr>
<tr><td>数学I
数学A</td><td>教育学部</td><td>算数科選修
理科教育分野
技術科教育分野</td><td>$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">数学I
数学II
数学A
数学B</td><td>文学部
法経学部</td><td>行動科学科</td><td>$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$</td></tr>
<tr><td>園芸学部
教育学部</td><td>
情報教育分野</td><td>$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$</td></tr>
<tr><td>教育学部</td><td>数学科教育分野</td><td>$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$
$\boxed{6}$ $\boxed{7}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">数学I
数学II
数学III
数学A
数学B
数学C</td><td>理学部
工学部</td><td>生物学科，地球科学科
建築学科
都市環境システム学科
デザイン学科</td><td>$\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$
$\boxed{8}$</td></tr>
<tr><td>理学部
薬学部
工学部

先進科学プログラム</td><td>物理学科，化学科

機械工学科
メディカルシステム工学科
電気電子工学科
ナノサイエンス学科
共生応用化学科
画像科学科
情報画像学科</td><td>$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$
$\boxed{9}$</td></tr>
<tr><td>医学部</td><td></td><td>$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$
$\boxed{11}$</td></tr>
<tr><td>理学部</td><td>数学・情報数理学科</td><td>$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$
$\boxed{9}$ $\boxed{11}$</td></tr>
</table>

$\boxed{1}$ 直角三角形 ABC は，$\angle C$ が直角で，各辺の長さは整数であるとする。辺 BC の長さが 3 以上の素数 p であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) 辺 AB, CA の長さを p を用いて表せ。

(2) $\tan \angle A$ と $\tan \angle B$ は，いずれも整数にならないことを示せ。

2 1辺の長さが2の正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ を考える。さいころを3回投げ，出た目を順に i, j, k とするとき，$\triangle A_iA_jA_k$ の面積を2乗した値を得点とする試行を行う。ただし，i, j, k の中に互いに等しい数があるときは，得点は0であるとする。

(1) 得点が0となる確率を求めよ。

(2) 得点が27となる確率を求めよ。

(3) 得点の期待値を求めよ。

◇M4(852—42)

$\boxed{3}$ △ABCにおいて，頂点Aから直線BCに下ろした垂線の長さは1，頂点Bから直線CAに下ろした垂線の長さは$\sqrt{2}$，頂点Cから直線ABに下ろした垂線の長さは2である。

このとき，△ABCの面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ。

4 a を実数とする。関数 $f(x) = x^2 - a|x-2| + \dfrac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

5 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ によって囲まれる領域を

$$D=\{(x,y)\mid x^2\leqq y\leqq ax+b\}$$

とし, D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で, x 座標, y 座標が共に整数である点を格子点と呼ぶ。

(1) $a=0$ のとき, D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2) a,b が共に整数であるとき, D に含まれる格子点の個数は, a,b の値によらず一定であることを示せ。

6 数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える。

（規則）サイコロを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に1移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に1移動する。

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする。

(1) $X(10) = 0$ である確率を求めよ。

(2) $X(1) \neq 0, X(2) \neq 0, \cdots, X(5) \neq 0$ であって，かつ，$X(6) = 0$ となる確率を求めよ。

(3) $X(1) \neq 0, X(2) \neq 0, \cdots, X(9) \neq 0$ であって，かつ，$X(10) = 0$ となる確率を求めよ。

$\boxed{7}$ $\triangle$ABC は，１辺の長さが１の正三角形で，t は正の実数とする。
$\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とおく。

直線 AB，AC 上にそれぞれ点 D，E があり，$\overrightarrow{AD} = t\vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = t\vec{c}$ をみたしている。正三角形 $\triangle$ADE の重心を G，線分 BE の中点を M とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MG}$ を計算せよ。

(2) t が正の実数全体を動くとき，$\triangle$CGM の面積を最小にする t の値と，そのときの面積を求めよ。

$\boxed{8}$ a, b は実数とする。関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = a\sin x + b\cos x + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$$

をみたし，かつ，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ における最大値は 2π である。このとき，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2\,dx$$

を最小にする a, b の値と，その最小値を求めよ。

9 a を1より大きい実数とし，座標平面上に，点 $\mathrm{O}(0,0)$，$\mathrm{A}(1,0)$ をとる。

曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が，3条件

(1) $p>0,\ q>0$

(2) $\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(3) $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は3に等しい

をみたしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

$\boxed{10}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $3^n = k^3 + 1$ をみたす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。

(2) $3^n = k^2 - 40$ をみたす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。

11 $f(x)$ は実数全体で定義された関数とする。実数 a に関する条件 (P) を考える。

(P) 正の実数 r を十分小さく選べば，$|x-a|<r$ をみたすすべての実数 x に対して $f(x) \leqq f(a)$ が成り立つ。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a が条件 (P) をみたし，かつ，$f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$f'(a)=0$ であることを証明せよ。

(2) 関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases} |x|-x & (x<1 \text{ のとき}) \\ |x^2-6x+8| & (x \geqq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されているとき，条件 (P) をみたすような実数 a 全体の集合を決定せよ。

(3) 一般に，実数全体で定義された関数 $f(x)$ に対し，次の命題は正しいか。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ。

（命題）すべての実数 a が条件 (P) をみたすならば，$f(x)$ は定数関数である。